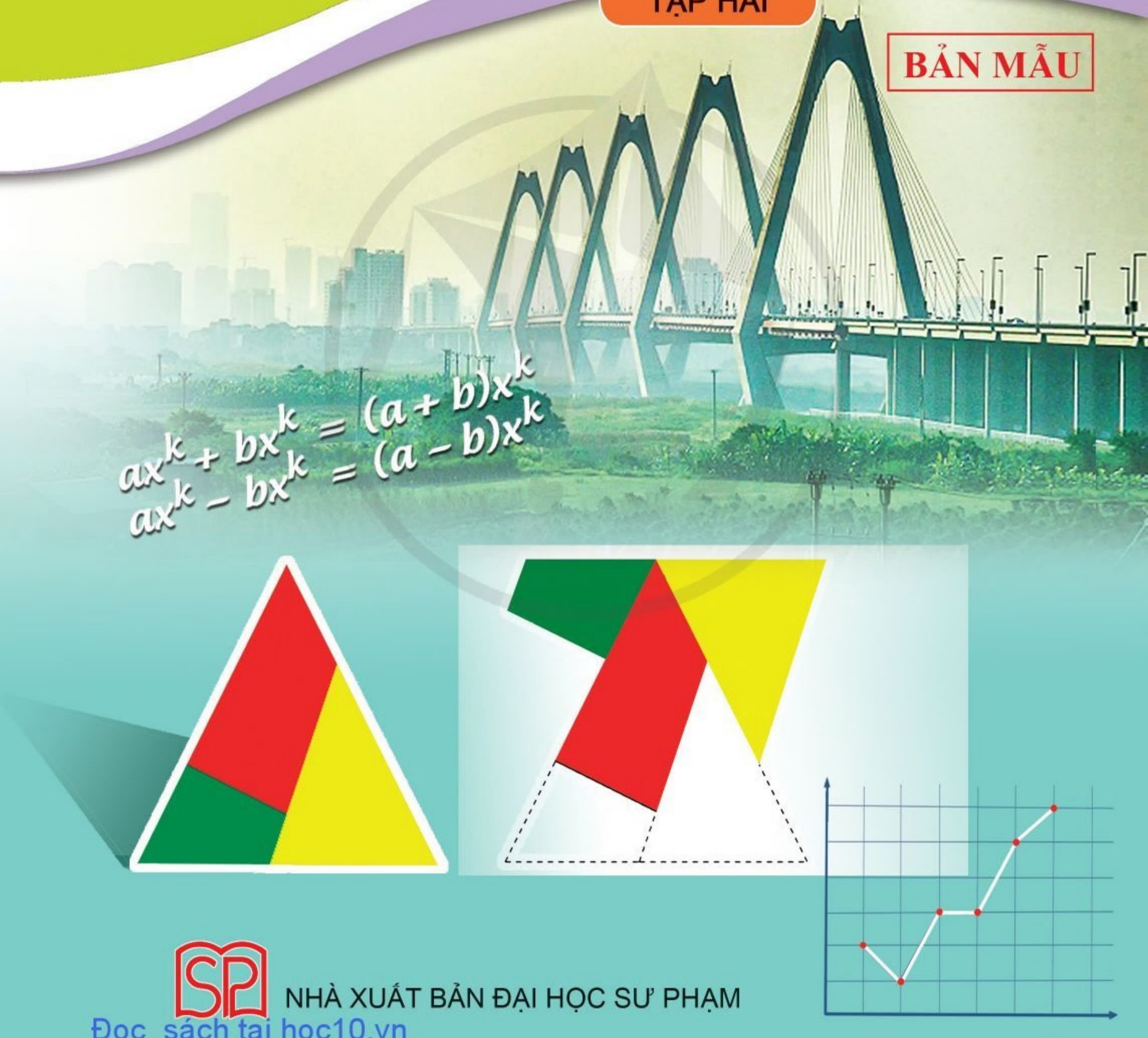
Cánh Diều

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 7

TẬP HAI

BẢN MẪU



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 7

TẬP HAI

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MỤC LỤC

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Chương V

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: thu thập, phân loại và biểu diễn dữ liệu; phân tích và xử lí dữ liệu; biểu đồ đoạn thẳng; biểu đồ hình quạt tròn; biến cố và xác suất của biến cố ngẫu nhiên trong một số trò chơi đơn giản.

§1. THU THẬP, PHÂN LOẠI VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU

Ở lớp 6, chúng ta đã làm quen với tiến trình thống kê, trong đó có thu thập, phân loại và biểu diễn dữ liệu.

Làm thế nào để biểu diễn dữ liệu đã được thu thập và phân loại?

I. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

1 Đọc kĩ các nội dung sau:

Lớp trưởng lớp 7D thu thập thông tin về Tổ I được những dữ liệu thống kê sau:

– Tổ I gồm mười bạn, đó là: An, Bích, Châu, Chung, Dung, Dương, Quỳnh, Sơn, Thuỷ, Việt.

– Số đo chiều cao (theo đơn vị xăng-ti-mét) của mười bạn đó lần lượt là: 153, 150, 154, 151, 152, 152, 154, 156, 155, 154.

Nhận xét: Trong các dữ liệu thống kê thu thập được, có những dữ liệu thống kê là số (số liệu) nhưng cũng có những dữ liệu thống kê không phải là số.

Ví dụ 1 Kết quả thu thập thông tin về các môn thể thao ưa thích của các học sinh khối lớp 7 ở một trường trung học cơ sở như sau:

– Các môn thể thao ưa thích là: Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền, Bóng đá.

– Số lượng học sinh ưa thích mỗi môn thể thao đó lần lượt là: 50, 30, 40, 80.

Trong hai loại dữ liệu thống kê thu thập được ở trên, dữ liệu thống kê nào là số liệu? Dữ liệu thống kê nào không phải là số liệu?

Giải

– Dãy dữ liệu thứ nhất là tên các môn thể thao học sinh ưa thích nên không phải là dãy số liệu.

– Dãy dữ liệu thứ hai là số lượng học sinh ưa thích mỗi môn thể thao đó nên là dãy số liệu.

II. TÍNH HỢP LÍ CỦA DỮ LIỆU

2 Đọc kĩ các nội dung sau:

Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại dữ liệu, ta cần xem xét tính hợp lí của những dữ liệu thống kê đó, đặc biệt chỉ ra được những dữ liệu không hợp lí. Ta có thể dựa trên những tiêu chí toán học đơn giản để thực hiện điều đó.

Ví dụ 2 Đông Nam Bộ là vùng kinh tế phát triển của Việt Nam có dân số đông. Bạn Hạnh ghi lại số liệu từ trang web *https://www.gso.gov.vn* về tỉ lệ tăng dân số của các tỉnh/thành phố vùng Đông Nam Bộ năm 2019 như *Bảng 1*. Bạn Hạnh đã ghi nhầm số liệu của một tỉnh/thành phố trong bảng đó. Theo em, bạn Hạnh đã ghi nhầm số liệu của tỉnh/thành phố nào? Biết rằng, tỉ lệ tăng dân số năm 2019 của các tỉnh/thành phố ở Việt Nam đều dưới 6%.

Tỉnh/Thành phố	Tỉ lệ tăng dân số (%)
Bà Rịa – Vũng Tàu	1,22
Bình Phước	1,31
Bình Dương	14,74
Đồng Nai	1,92
Tây Ninh	0,95
TP. Hồ Chí Minh	2,21

Bảng 1

Giải

Số liệu tỉ lệ tăng dân số của tỉnh Bình Dương đã bị ghi nhầm vì tỉ lệ tăng dân số của các địa phương đều dưới 6%.

Ví dụ 3 Trong cuộc thi chạy cự li 100 m của học sinh nam nhân ngày Thể thao Việt Nam 27/3, có năm học sinh An, Bình, Cường, Dũng, Đông tham gia với kết quả chạy được thống kê như sau:

Học sinh	An	Bình	Cường	Dũng	Đông
Thời gian (giây)	14,6	15,7	14	9,1	14,2

Sau khi xem lại kết quả, ban tổ chức nhận ra có thể đã ghi nhầm số liệu của một học sinh.

a) Ban tổ chức có thể đã ghi nhầm số liệu của học sinh nào?

b) Hãy chỉ ra cách chọn một học sinh chạy nhanh nhất để dự thi cấp liên trường.

Giải

a) Kết quả của bạn Dũng có thể bị sai vì kỉ lục thế giới chạy cự li 100 m nam có thời gian vẫn lớn hơn 9,1 giây.

b) Nếu không tính bạn Dũng thì bạn Cường chạy nhanh nhất. Chọn một thời điểm phù hợp để hai bạn Cường và Dũng cùng chạy, nếu ai chạy nhanh hơn thì chọn người đó dự thi cấp liên trường.

III. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ

Ở lớp 6, chúng ta đã làm quen với việc mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ (bảng số liệu, biểu đồ tranh, biểu đồ cột, biểu đồ cột kép).

Trong mục này, chúng ta tiếp tục tìm hiểu sâu hơn việc đọc hiểu, rút ra những thông tin cần thiết từ những dạng biểu diễn dữ liệu đã học và nhận biết những dạng biểu diễn khác nhau cho một tập dữ liệu.

3 Biểu đồ cột ở *Hình 1* biểu diễn tổng doanh thu du lịch (ước đạt) của tỉnh Khánh Hoà trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.

(Nguồn: Báo cáo của Sở du lịch tỉnh Khánh Hoà từ năm 2016 đến năm 2020)

Hình 1

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Khánh Hoà là vùng đất du lịch với những bãi biển nổi tiếng không chỉ ở nước ta mà cả trên thế giới.

a) Nêu cách xác định tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong mỗi năm từ 2016 đến 2020.

b) Nêu một vài lí do giải thích vì sao tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong năm 2020 giảm so với năm 2019.

Để xác định tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong mỗi năm từ 2016 đến 2020, ta làm như sau:

Nhìn vào cột biểu thị tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong năm 2016, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 11 452,6 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đồng. Vậy tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong năm 2016 là 11 452,6 tỉ đồng.

Tương tự như trên, ta xác định được tổng doanh thu du lịch của tỉnh Khánh Hoà trong mỗi năm còn lại.

Ví dụ 4 Biểu đồ cột kép ở *Hình 2* biểu diễn kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may và ngành da giày của Việt Nam trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020. Ở đây, kim ngạch xuất khẩu một loại hàng hoá là số tiền thu được khi xuất khẩu loại hàng hoá đó.

a) Nêu cách xác định kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may của Việt Nam trong mỗi năm từ 2017 đến 2020.

b) Nêu cách xác định kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành da giày của Việt Nam trong mỗi năm từ 2017 đến 2020.

(Nguồn: Báo cáo của Bộ Công thương từ năm 2017 đến năm 2020)

Hình 2

c) Lập bảng số liệu thống kê kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may và ngành da giày của Việt Nam theo mẫu sau (đơn vị: tỉ đô la Mỹ):

Năm / Ngành	2017	2018	2019	2020
Dệt may	?	?	?	?
Da giày	?	?	?	?

Giải

a) Nhìn vào cột (màu xanh) biểu thị kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may của Việt Nam trong năm 2017, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 31,8 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đô la Mỹ. Vậy kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may của Việt Nam trong năm 2017 là 31,8 tỉ đô la Mỹ.

Tương tự như trên, ta xác định được kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành dệt may của Việt Nam trong các năm 2018, 2019, 2020 lần lượt là: 36,2; 38,8; 35,0 (tỉ đô la Mỹ).

b) Nhìn vào cột (màu cam) biểu thị kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành da giày của Việt Nam trong năm 2017, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 17,9 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đô la Mỹ. Vậy kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành da giày của Việt Nam trong năm 2017 là 17,9 tỉ đô la Mỹ.

Tương tự như trên, ta xác định được kim ngạch xuất khẩu sản phẩm ngành da giày của Việt Nam trong các năm 2018, 2019, 2020 lần lượt là: 19,6; 22,1; 19,9 (tỉ đô la Mỹ).

c) Ta có bảng số liệu sau (đơn vị: tỉ đô la Mỹ):

Ngành \ Năm	2017	2018	2019	2020
Dệt may	31,8	36,2	38,8	35,0
Da giày	17,9	19,6	22,1	19,9

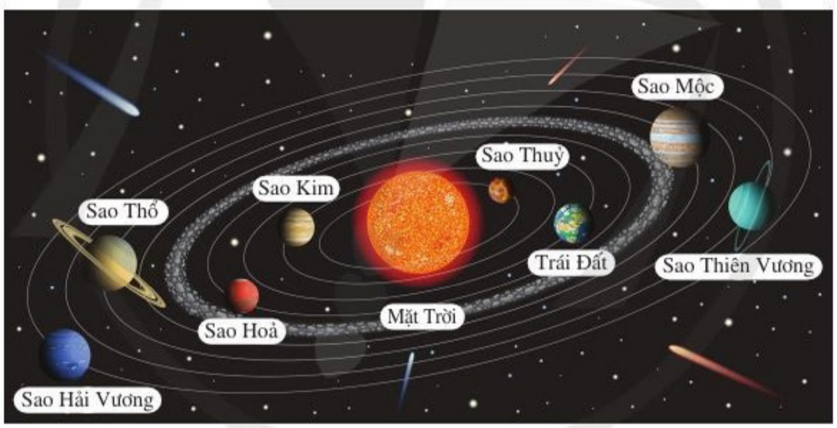
BÀI TẬP

1. Sau khi tìm hiểu thông tin về Hệ Mặt Trời từ trang web *https://solarsystem.nasa.gov*, bạn Ngân thu thập được những dữ liệu thống kê sau:

– Hệ Mặt Trời gồm tám hành tinh, đó là: Sao Thuỷ, Sao Kim, Trái Đất, Sao Hoả, Sao Mộc, Sao Thổ, Sao Thiên Vương, Sao Hải Vương.

– Bán kính (theo đơn vị ki-lô-mét) của tám hành tinh đó lần lượt là:

2 440, 6 052, 6 371, 3 390, 69 911, 58 232, 25 362, 24 622.

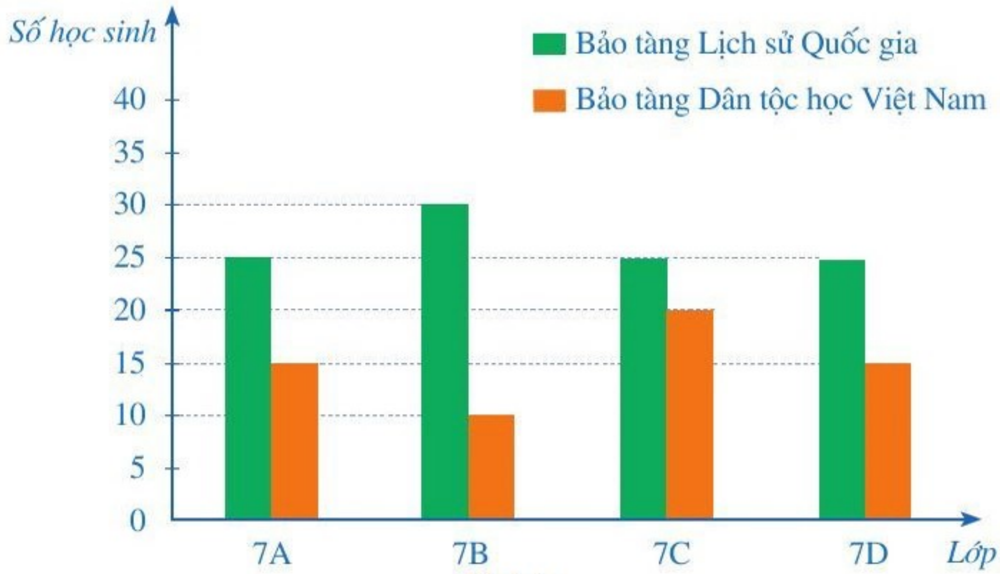


Hệ Mặt Trời

(*Nguồn: https://www.shuttertock.com*)

Trong hai loại dữ liệu thống kê thu thập được ở trên, dữ liệu thống kê nào là số liệu? Dữ liệu thống kê nào không phải là số liệu?

2. Khối lớp 7 của một trường trung học cơ sở có bốn lớp là 7A, 7B, 7C, 7D, mỗi lớp có 40 học sinh. Nhà trường cho học sinh khối lớp 7 đăng kí tham quan hai bảo tàng: Bảo tàng Lịch sử Quốc gia và Bảo tàng Dân tộc học Việt Nam. Mỗi học sinh chỉ đăng kí tham quan đúng một bảo tàng. Bạn Thảo lập biểu đồ cột kép ở *Hình 3* biểu diễn số lượng học sinh đăng kí tham quan hai bảo tàng trên của từng lớp.



Hình 3

Bạn Thảo đã biểu diễn nhầm số liệu của một lớp trong biểu đồ cột kép ở *Hình 3*. Theo em, bạn Thảo đã biểu diễn nhầm số liệu của lớp nào?

3. Biểu đồ cột kép ở *Hình 4* biểu diễn dân số (ước tính) của Việt Nam và Thái Lan ở một số năm trong giai đoạn từ năm 1979 đến năm 2019.

(*Nguồn: https://danso.org*)

Hình 4

a) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

Năm	1979	1989	1999	2009	2019
Dân số Việt Nam (triệu người)	?	?	?	?	?
Dân số Thái Lan (triệu người)	?	?	?	?	?
Tỉ số của dân số Việt Nam và dân số Thái Lan	?	?	?	?	?

b) Trong các năm trên, tỉ số của dân số Việt Nam và dân số Thái Lan lớn nhất ở năm nào?

§2. PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU

Loại / Tổ	Giỏi	Khá	Đạt
Tổ 1	7	2	1
Tổ 2	6	2	2
Tổ 3	5	5	0
Tổ 4	6	1	3

Bảng 2

Xếp loại thi đua bốn tổ lao động của một đội sản xuất được thống kê ở *Bảng 2* (đơn vị: người). Bằng cách phân tích và xử lí dữ liệu thống kê, hãy cho biết:

a) Đội sản xuất trên có bao nhiêu người?

b) Đội trưởng thông báo rằng tỉ số phần trăm của số lao động giỏi và số người ở cả đội là 65%. Thông báo đó của đội trưởng có đúng không?

I. PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU ĐỂ RÚT RA KẾT LUẬN

1 Đọc kĩ các nội dung sau:

Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại, biểu diễn dữ liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích và xử lí các dữ liệu đó để tìm ra những thông tin hữu ích và rút ra kết luận. Thông thường, quá trình phân tích và xử lí dữ liệu dựa trên tính toán và suy luận toán học.

Ví dụ 1 Biểu đồ cột ở *Hình 5* biểu diễn số lượt khách du lịch (ước đạt) đến Ninh Bình trong các năm 2016, 2017, 2018.

(Nguồn: Báo cáo của Sở du lịch tỉnh Ninh Bình từ năm 2016 đến năm 2018)

Hình 5

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Ninh Bình là vùng đất với những di tích, danh lam thắng cảnh nổi tiếng như: Cố đô Hoa Lư; Quần thể danh thắng Tràng An; chùa Bái Đính; nhà thờ Phát Diệm, ... luôn thu hút du khách trong nước và quốc tế.

a) Số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2017 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2016 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2018 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2017 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

a) Tỉ số phần trăm của số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2017 và số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2016 là:

$$\frac{7{,}06\,.\,100}{6{,}44}\% \approx 109{,}6\%.$$

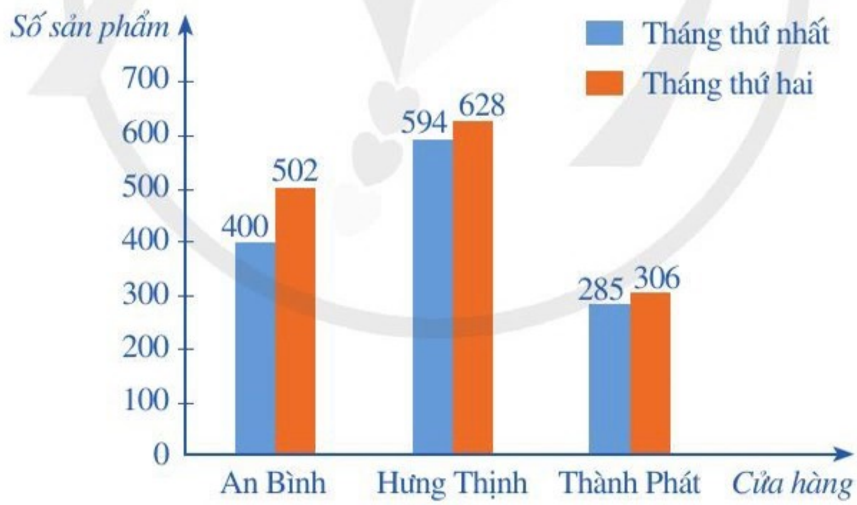
Vậy số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2017 tăng khoảng 9,6% so với năm 2016.

b) Tỉ số phần trăm của số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2018 và số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2017 là:

$$\frac{7{,}3\,.\,100}{7{,}06}\% \approx 103{,}4\%.$$

Vậy số lượt khách du lịch đến Ninh Bình trong năm 2018 tăng khoảng 3,4% so với năm 2017.

Ví dụ 2 Một công ty mới thành lập có ba cửa hàng bán sản phẩm. Biểu đồ cột kép ở *Hình 6* biểu diễn số sản phẩm bán được của mỗi cửa hàng trong hai tháng đầu:



Hình 6

Cửa hàng nào bán được nhiều sản phẩm nhất trong tháng thứ nhất? Tháng thứ hai?

Giải

Trong các cột màu xanh của biểu đồ cột ở *Hình 6*, cột màu xanh ứng với cửa hàng Hưng Thịnh có chiều cao lớn nhất. Vì thế, cửa hàng Hưng Thịnh bán được nhiều sản phẩm nhất trong tháng thứ nhất.

Trong các cột màu cam của biểu đồ cột ở *Hình 6*, cột màu cam ứng với cửa hàng Hưng Thịnh cũng có chiều cao lớn nhất. Vì thế, cửa hàng Hưng Thịnh cũng bán được nhiều sản phẩm nhất trong tháng thứ hai.

II. TÍNH HỢP LÍ CỦA KẾT LUẬN THỐNG KÊ

2 Đọc kĩ các nội dung sau:

Quá trình phân tích và xử lí dữ liệu giúp chúng ta có thể nhận biết được: tính hợp lí của dữ liệu thống kê, tính hợp lí của kết luận thống kê và ta cũng có thể bác bỏ kết luận đã nêu ra. Thông thường, để làm được điều đó ta dựa trên những tiêu chí đơn giản hoặc dựa trên tính toán và suy luận toán học.

Ví dụ 3 Theo Thông tư 22/2021/TT-BGDĐT, kết quả học tập của học sinh trong Học kì I được đánh giá theo một trong bốn mức: Tốt, Khá, Đạt, Chưa đạt, trong đó được đánh giá mức Tốt khi đạt cả ba tiêu chí:

(1) Tất cả các môn học đánh giá bằng nhận xét được đánh giá mức Đạt.

(2) Tất cả các môn học đánh giá bằng nhận xét kết hợp đánh giá bằng điểm số có điểm trung bình môn Học kì I từ 6,5 điểm trở lên.

(3) Trong các môn học đánh giá bằng nhận xét kết hợp đánh giá bằng điểm số, có ít nhất 6 môn học có điểm trung bình Học kì I đạt từ 8,0 điểm trở lên (viết tắt là $\text{ĐTB}_{\text{mhkI}} \geq 8$).

Học sinh khối lớp 7 của một trường trung học cơ sở đã học 10 môn học trong Học kì I, trong đó có 8 môn học được đánh giá bằng nhận xét kết hợp đánh giá bằng điểm số. Tất cả các học sinh của lớp 7A đều đạt tiêu chí (1) và tiêu chí (2). Giáo viên chủ nhiệm lớp 7A thống kê số lượng môn học có $\text{ĐTB}_{\text{mhkI}} \geq 8$ ở lần lượt mỗi học sinh trong lớp (mỗi học sinh được tính đúng một lần) như sau:

Số môn học có $\text{ĐTB}_{\text{mhkI}} \geq 8$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Số học sinh	0	2	5	7	8	6	4	3	5

a) Lớp 7A có tất cả bao nhiêu học sinh?

b) Trong buổi sơ kết cuối Học kì I, giáo viên chủ nhiệm lớp 7A thông báo: Tỉ lệ học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Tốt là 30% so với cả lớp. Thông báo đó của giáo viên chủ nhiệm có đúng không?

Giải

a) Số học sinh của lớp 7A là:

$$0 + 2 + 5 + 7 + 8 + 6 + 4 + 3 + 5 = 40 \text{ (học sinh)}.$$

b) Số học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Tốt của lớp 7A là:

$$4 + 3 + 5 = 12 \text{ (học sinh)}.$$

So với cả lớp 7A, tỉ lệ học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Tốt là:

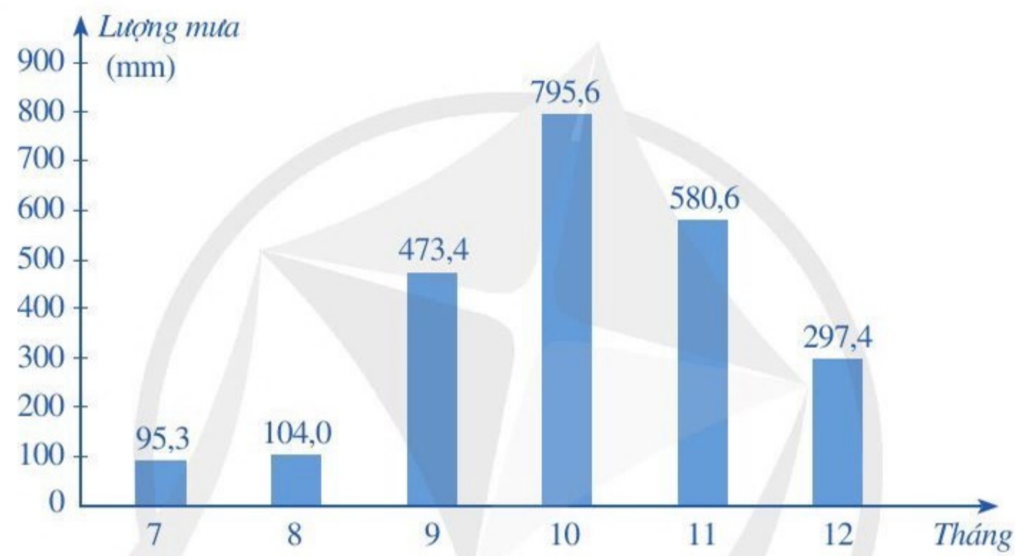
$$\frac{12 \,.\, 100}{40}\% = 30\%.$$

Vậy thông báo đó của giáo viên chủ nhiệm là đúng.

Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

BÀI TẬP

1. Biểu đồ ở *Hình 7* biểu diễn lượng mưa tại trạm khí tượng Huế trong sáu tháng cuối năm dương lịch.



(Nguồn: Địa lí 8, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016)

Hình 7

a) Nêu đối tượng thống kê và tiêu chí thống kê.

b) Lập bảng số liệu thống kê lượng mưa tại trạm khí tượng Huế theo mẫu sau:

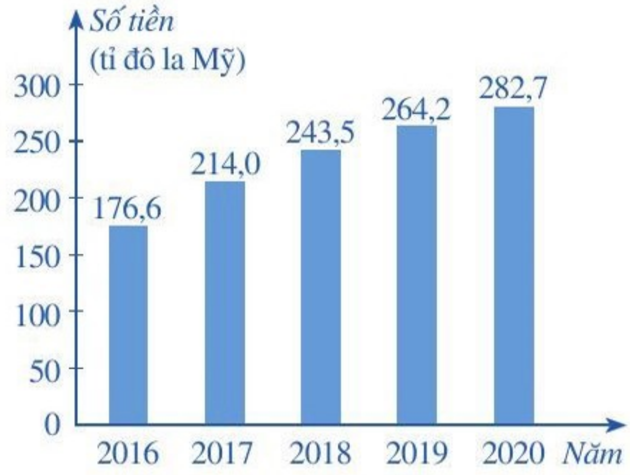
Tháng	7	8	9	10	11	12
Lượng mưa (mm)	?	?	?	?	?	?

c) Trong các tháng trên, tháng nào có lượng mưa nhiều nhất? Tháng nào có lượng mưa ít nhất?

2. Nền kinh tế Việt Nam ngày càng hội nhập sâu rộng với nền kinh tế thế giới. Biểu đồ cột ở *Hình 8* biểu diễn kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.

a) Kim ngạch xuất khẩu hàng hoá năm 2019 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2018 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Kim ngạch xuất khẩu hàng hoá năm 2020 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2019 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



(*Nguồn: Tổng cục Hải quan*)

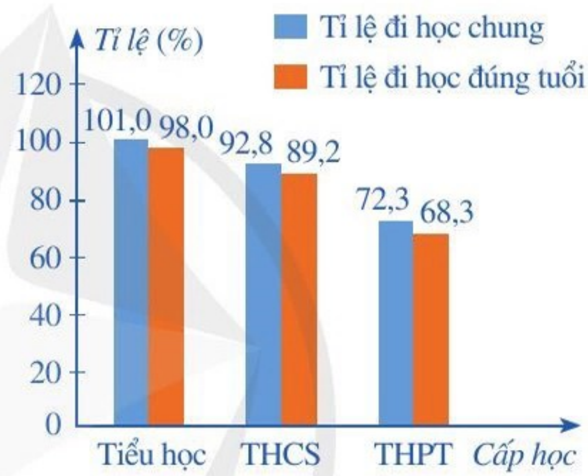
Hình 8

3. Giáo dục phổ thông ở nước ta gồm ba cấp học là: cấp tiểu học, cấp trung học cơ sở (THCS), cấp trung học phổ thông (THPT). Từ năm 2010 đến năm 2019, giáo dục phổ thông đã có sự cải thiện rõ rệt về việc tăng tỉ lệ đi học chung và đi học đúng tuổi. Biểu đồ cột kép ở *Hình 9* biểu diễn tỉ lệ đi học chung và tỉ lệ đi học đúng tuổi của mỗi cấp học ở nước ta năm 2019.

a) Tỉ lệ đi học chung của mỗi cấp học ở nước ta năm 2019 là bao nhiêu?

b) Tỉ lệ đi học đúng tuổi của mỗi cấp học ở nước ta năm 2019 là bao nhiêu?

c) Tỉ lệ đi học chung của cấp tiểu học là 101,0% được hiểu như thế nào? Giải thích lí do.



(*Nguồn: Tổng cục Thống kê*)

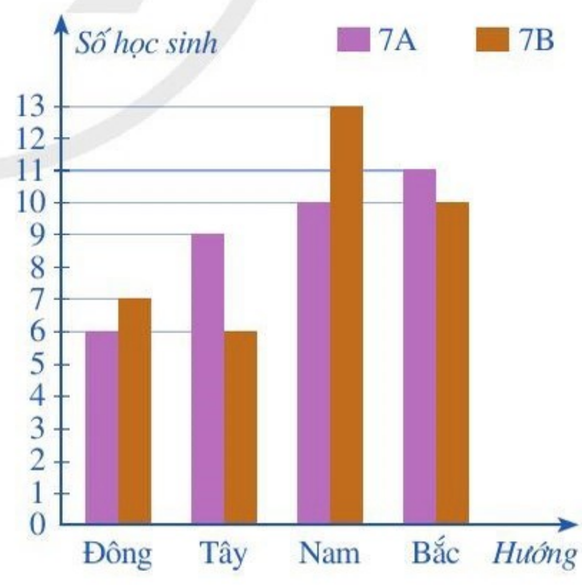
Hình 9

4. Biểu đồ cột kép ở *Hình 10* biểu diễn số lượng học sinh lớp 7A và 7B có nhà nằm ở bốn hướng Đông, Tây, Nam, Bắc của trường học.

a) Lập bảng số liệu thống kê số lượng học sinh lớp 7A và 7B có nhà nằm ở bốn hướng Đông, Tây, Nam, Bắc của trường học theo mẫu sau:

Hướng	Đông	Tây	Nam	Bắc
Lớp 7A	?	?	?	?
Lớp 7B	?	?	?	?

b) Có 15 bạn trong hai lớp 7A và 7B thường nói rằng: Trong những ngày nắng, mỗi lần đi thẳng từ nhà đến trường vào buổi sáng hay bị chói mắt vì Mặt Trời chiếu thẳng vào mắt. Em có biết vì sao các bạn nói như vậy hay không?



Hình 10

§3. BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Biểu đồ ở *Hình 11* biểu diễn thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam (tính theo đô la Mỹ) ở một số năm trong giai đoạn từ năm 1986 đến năm 2020.

(*Nguồn: https://data.worldbank.org*)

Hình 11

I. BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

1 Quan sát biểu đồ thống kê ở *Hình 11* và cho biết:

a) Đối tượng thống kê là gì và được biểu diễn trên trục nào;

b) Tiêu chí thống kê là gì và được biểu diễn trên trục nào;

c) Mỗi điểm đầu mút của các đoạn thẳng trong đường gấp khúc được xác định như thế nào.

Biểu đồ thống kê ở *Hình 11* gọi là *biểu đồ đoạn thẳng*.

Nhận xét: Biểu đồ đoạn thẳng có các yếu tố sau:

- *Trục nằm ngang* biểu diễn các đối tượng thống kê;
- *Trục thẳng đứng* biểu diễn tiêu chí thống kê và trên trục đó đã xác định độ dài đơn vị thống kê;
- Biểu đồ đoạn thẳng là *đường gấp khúc* nối từng điểm liên tiếp bằng các đoạn thẳng;
- *Mỗi điểm đầu mút của các đoạn thẳng trong đường gấp khúc* được xác định bởi một đối tượng thống kê và số liệu thống kê theo tiêu chí của đối tượng đó.

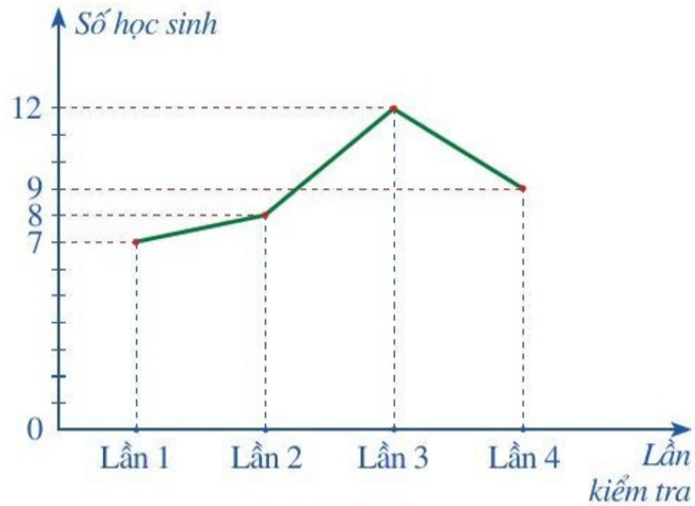
Chẳng hạn với biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 11*, ta có:

– Trục nằm ngang biểu diễn các đối tượng thống kê là các năm: 1986, 1991, 2010, 2017, 2018, 2019, 2020;

– Trục thẳng đứng biểu diễn tiêu chí thống kê là thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam (tính theo đô la Mỹ) trong những năm nêu trên;

– Đường gấp khúc gồm các đoạn thẳng nối liền liên tiếp 7 điểm. Mỗi điểm được xác định bởi năm thống kê và thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam trong năm đó.

Ví dụ 1 Biểu đồ ở *Hình 12* biểu diễn số học sinh đạt điểm giỏi trong bốn lần kiểm tra môn Toán của lớp 7A: lần 1, lần 2, lần 3, lần 4. Nêu số học sinh đạt điểm giỏi trong từng lần kiểm tra môn Toán của lớp 7A.



Hình 12

Giải

Để biết số học sinh đạt điểm giỏi trong từng lần kiểm tra môn Toán, ta làm như sau:

– Từ điểm "Lần 1" trên trục nằm ngang, dóng theo chiều thẳng đứng tới đầu mút của đoạn thẳng thuộc đường gấp khúc;

– Đi tiếp theo chiều ngang về bên trái cho đến khi gặp trục thẳng đứng;

– Đọc số chỉ trên trục thẳng đứng.

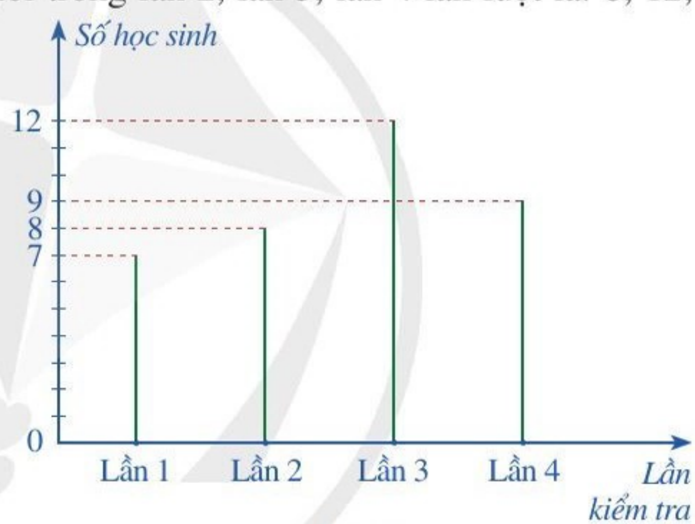
Ta có: Số học sinh đạt điểm giỏi trong lần 1 là 7 (học sinh).

Tương tự như trên, số học sinh đạt điểm giỏi trong lần 2, lần 3, lần 4 lần lượt là: 8; 12; 9 (học sinh).

Chú ý

• Cũng như biểu đồ cột và biểu đồ cột kép, biểu đồ đoạn thẳng giúp chúng ta "trực quan hoá" một tập dữ liệu thống kê thông qua cách biểu diễn hình học tập dữ liệu đó.

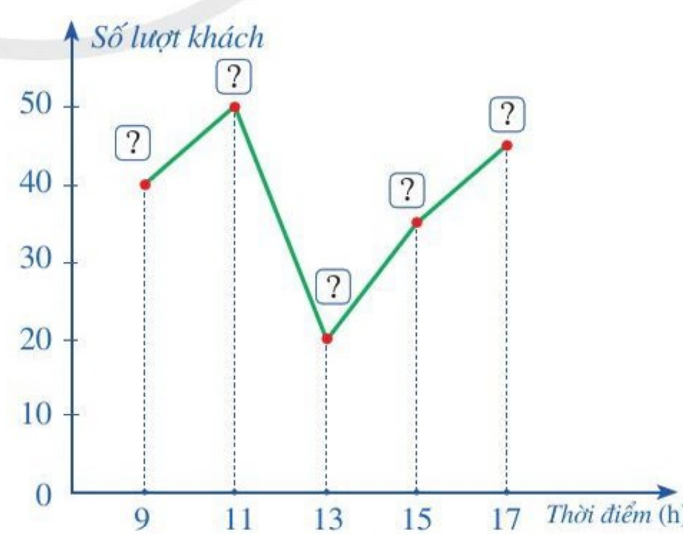
• Người ta còn biểu diễn dữ liệu thống kê ở dạng biểu đồ tương tự biểu đồ cột, trong đó các cột được thay bằng các đoạn thẳng. Biểu đồ đó cũng gọi là *biểu đồ đoạn thẳng*, chẳng hạn xem biểu đồ ở *Hình 13*.



Hình 13

Ví dụ 2 Để bố trí đội ngũ nhân viên phục vụ, quản lí của một cửa hàng đã tiến hành đếm số lượt khách đến cửa hàng đó vào một số thời điểm trong ngày. Kết quả kiểm đếm được cho trong bảng sau:

Thời điểm (h)	9	11	13	15	17
Số lượt khách	40	50	20	35	45

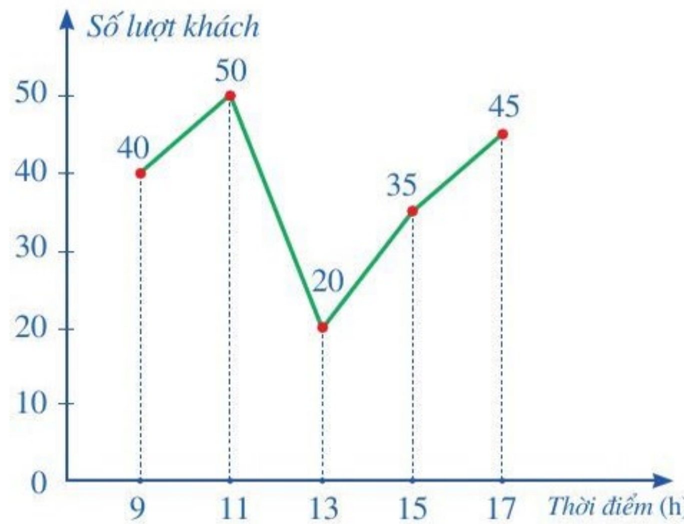


Hình 14

Chọn số liệu thích hợp cho [?] trên *Hình 14* để nhận được biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số lượt khách đến cửa hàng đó vào những thời điểm trong ngày đã nêu.

Giải

Sau khi hoàn thiện các số liệu trên vào *Hình 14*, ta nhận được biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 15* biểu diễn số lượt khách đến cửa hàng đó vào những thời điểm trong ngày đã nêu.



Hình 15

2 Nêu một số dạng biểu diễn của một tập dữ liệu.

Như ta đã biết, dữ liệu thống kê có thể biểu diễn ở những dạng khác nhau, trong đó có biểu đồ đoạn thẳng. Sau đây, ta sẽ làm quen với một ví dụ cụ thể.

Ví dụ 3 Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 16* biểu diễn dân số của Thủ đô Hà Nội ở một số năm trong giai đoạn từ năm 1954 đến năm 2019.

(*Nguồn: https://hanoi.gov.vn*)

Hình 16

Lập bảng số liệu thống kê dân số của Hà Nội theo mẫu sau:

Năm	1954	1961	1978	1999	2009	2019
Dân số (người)	?	?	?	?	?	?

Giải

Từ biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 16*, ta có bảng số liệu sau:

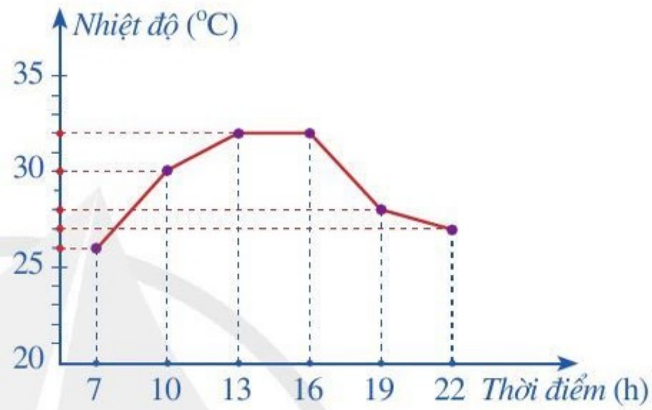
Năm	1954	1961	1978	1999	2009	2019
Dân số (người)	53 000	91 000	2 500 000	2 672 122	6 448 837	8 053 663

II. PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU BIỂU DIỄN BẰNG BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

3 Biểu đồ đoạn thẳng trong *Hình 17* biểu diễn nhiệt độ ở Hà Nội trong ngày 07/5/2021 tại một số thời điểm.

a) Nêu nhiệt độ lúc 7 h, 10 h, 13 h, 16 h, 19 h, 22 h.

b) Hãy nhận xét về sự thay đổi nhiệt độ trong các khoảng thời gian: 7 h – 10 h (tức là từ 7 h đến 10 h); 10 h – 13 h; 13 h – 16 h; 16 h – 19 h; 19 h – 22 h.



(*Nguồn: https://nchmf.gov.vn*)

Hình 17

Để nêu nhận xét về sự thay đổi nhiệt độ trong các khoảng thời gian đã cho, ta làm như sau:

Do nhiệt độ lúc 7 h, 10 h, 13 h, 16 h, 19 h, 22 h lần lượt là: 26 °C; 30 °C; 32 °C; 32 °C; 28 °C; 27 °C nên ta có các nhận xét sau:

– Nhiệt độ tăng trong các khoảng thời gian 7 h – 10 h và 10 h – 13 h;

– Nhiệt độ ổn định trong khoảng thời gian 13 h – 16 h;

– Nhiệt độ giảm trong các khoảng thời gian 16 h – 19 h và 19 h – 22 h.

Nhận xét: Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng, ta có thể xác định xu hướng tăng hoặc giảm của tập số liệu trong một khoảng thời gian nhất định.

Ví dụ 4 Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 18* biểu diễn số vụ tai nạn giao thông (TNGT) của nước ta trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020.

a) Lập bảng số liệu thống kê số vụ TNGT của nước ta theo mẫu sau:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Số vụ TNGT	?	?	?	?	?

b) Trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020, năm nào có số vụ TNGT nhiều nhất?

c) Số vụ TNGT năm 2019 đã giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2018 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

(*Nguồn: Báo cáo của Uỷ ban An toàn giao thông Quốc gia từ năm 2016 đến năm 2020*)

Hình 18

d) Số vụ TNGT năm 2020 đã giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2019 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

e) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 18*, nêu nhận xét về số vụ TNGT ở nước ta trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020.

Giải

a) Từ biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 18*, ta có bảng số liệu sau:

Năm	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
Số vụ TNGT	21 589	20 080	18 736	17 621	14 510

b) Trong giai đoạn trên, năm 2016 có số vụ TNGT nhiều nhất với 21 589 vụ.

c) Tỉ số phần trăm của số vụ TNGT năm 2019 và số vụ TNGT năm 2018 là:

$$\frac{17\,621 \,.\, 100}{18\,736}\% \approx 94\%.$$

Vậy số vụ TNGT năm 2019 đã giảm khoảng 100% – 94% = 6% so với năm 2018.

d) Tỉ số phần trăm của số vụ TNGT năm 2020 và số vụ TNGT năm 2019 là:

$$\frac{14\,510 \,.\, 100}{17\,621}\% \approx 82{,}3\%.$$

Vậy số vụ TNGT năm 2020 đã giảm khoảng 100% – 82,3% = 17,7% so với năm 2019.

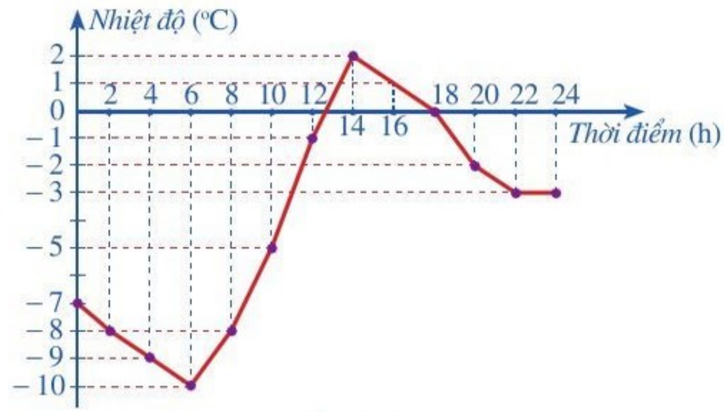
e) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 18*, ta thấy số vụ TNGT ở nước ta liên tục giảm trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020.

BÀI TẬP

1. Biểu đồ đoạn thẳng trong *Hình 19* biểu diễn nhiệt độ trong một ngày mùa đông tại một địa điểm ở miền ôn đới.

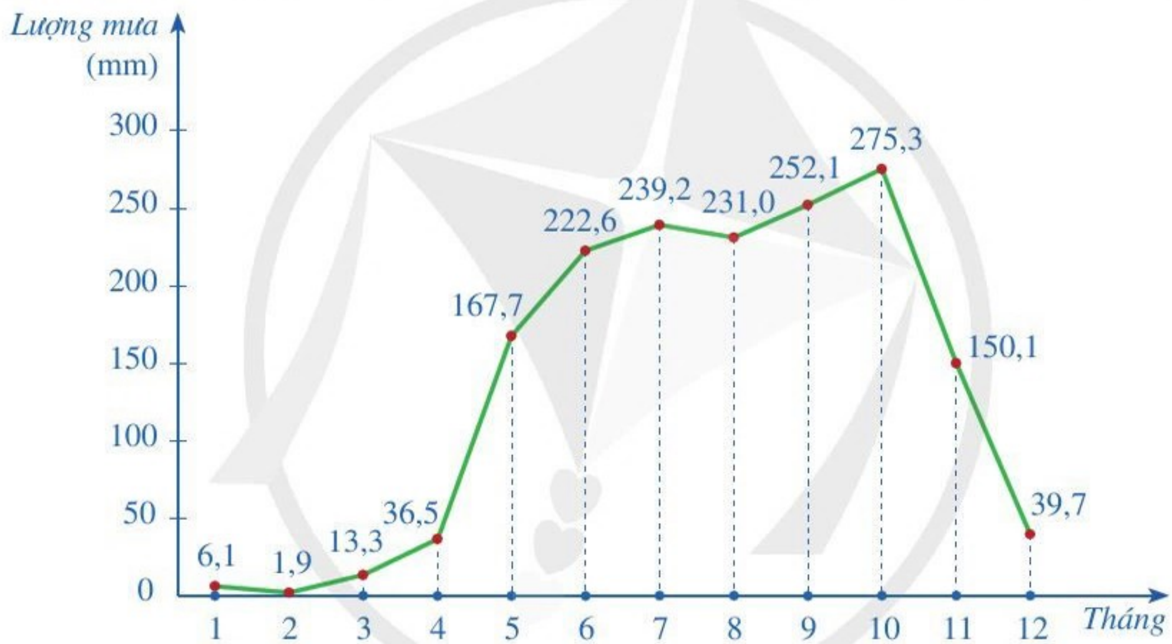
a) Nêu nhiệt độ lúc 2 h, 6 h, 10 h, 14 h, 18 h, 22 h.

b) Hãy nhận xét về sự thay đổi nhiệt độ trong các khoảng thời gian: 2 h – 6 h; 6 h – 10 h; 10 h – 14 h; 14 h – 18 h; 18 h – 22 h; 22 h – 24 h.



Hình 19

2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 20* biểu diễn lượng mưa trung bình tháng ở Cần Thơ.



(Nguồn: Lê Huy Bá, Lương Văn Việt và Nguyễn Xuân Hoàn, Khô hạn, xâm nhập mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long – Cơ sở lí luận và thực tiễn, NXB ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 2017)

Hình 20

a) Lập bảng số liệu thống kê lượng mưa trung bình tháng ở Cần Thơ theo mẫu sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lượng mưa (mm)	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Tính tổng lượng mưa trung bình năm ở Cần Thơ.

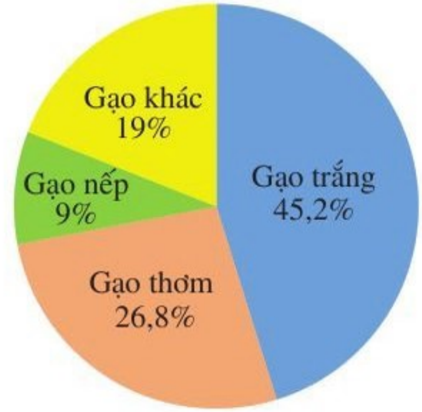
c) Tìm ba tháng có lượng mưa trung bình tháng lớn nhất ở Cần Thơ.

d) Tìm ba tháng khô hạn nhất ở Cần Thơ.

§4. BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

Năm 2020, Việt Nam xuất khẩu (ước đạt) 6,15 triệu tấn gạo, thu được 3,07 tỉ đô la Mỹ. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 21* biểu diễn khối lượng xuất khẩu của mỗi loại gạo trong tổng số gạo xuất khẩu (tính theo tỉ số phần trăm).

Khối lượng xuất khẩu gạo trắng chiếm bao nhiêu phần trăm?



(*Nguồn: Báo cáo của Bộ Công thương năm 2020*)

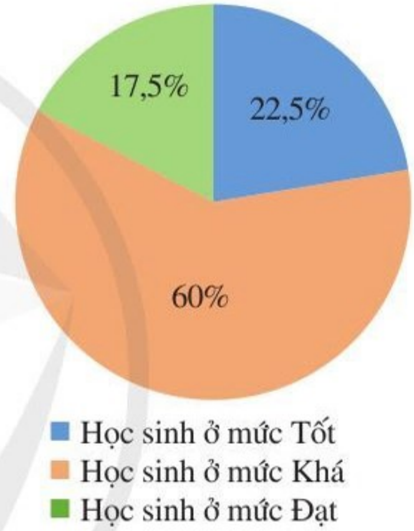
Hình 21

I. BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

1 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 22* biểu diễn kết quả phân loại học tập (tính theo tỉ số phần trăm) của 200 học sinh khối lớp 7 ở một trường trung học cơ sở.

a) Có bao nhiêu phần trăm học sinh ở mức Tốt? Bao nhiêu phần trăm học sinh ở mức Khá? Bao nhiêu phần trăm học sinh ở mức Đạt?

b) Tổng ba tỉ số phần trăm ghi ở ba hình quạt tròn bằng bao nhiêu?



Hình 22

Nhận xét: Biểu đồ hình quạt tròn có các yếu tố sau:

• *Đối tượng thống kê* được biểu diễn bằng các hình quạt tròn.

• *Số liệu thống kê* theo tiêu chí thống kê của mỗi đối tượng (thống kê) được ghi ở hình quạt tròn tương ứng. Số liệu thống kê đó được tính theo tỉ số phần trăm.

• Tổng các tỉ số phần trăm ghi ở các hình quạt tròn là 100%, nghĩa là tổng các tỉ số phần trăm của các số liệu thành phần phải bằng 100% (của tổng thể thống kê).

Chẳng hạn với biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 22*, ta có:

– Đối tượng và tiêu chí thống kê: kết quả phân loại học tập của học sinh (Tốt, Khá, Đạt) và được biểu diễn bởi ba hình quạt tròn.

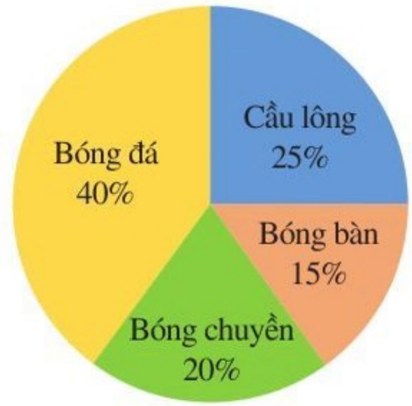
– Số liệu thống kê theo tiêu chí thống kê của mỗi đối tượng (thống kê): biểu diễn bởi tỉ số phần trăm ghi ở mỗi hình quạt tròn, tương ứng với kết quả phân loại học tập của học sinh.

– Tổng ba tỉ số phần trăm ghi ở ba hình quạt tròn là: 22,5% + 60% + 17,5% = 100%, nghĩa là tổng các tỉ số phần trăm của các số liệu thành phần phải bằng 100% (của tổng thể thống kê).

Ví dụ 1 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 23* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn môn thể thao ưa thích nhất trong bốn môn: Bóng đá, Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền của 300 học sinh khối lớp 7 ở một trường trung học cơ sở. Mỗi học sinh chỉ được chọn một môn thể thao khi được hỏi ý kiến.

a) Có bao nhiêu phần trăm học sinh chọn môn thể thao ưa thích nhất là Bóng đá? Cầu lông? Bóng bàn? Bóng chuyền?

b) Số học sinh chọn môn Cầu lông và Bóng bàn chiếm bao nhiêu phần trăm? Số học sinh chọn môn Bóng đá gấp bao nhiêu lần số học sinh chọn môn Bóng chuyền?



Hình 23

Giải

a) Tỉ số phần trăm của số học sinh chọn môn Bóng đá, môn Cầu lông, môn Bóng bàn, môn Bóng chuyền so với số học sinh khối lớp 7 lần lượt là: 40%, 25%, 15%, 20%.

b) Số học sinh chọn môn Cầu lông và môn Bóng bàn chiếm 25% + 15% = 40% (số học sinh khối lớp 7).

Do 40% : 20% = 2 nên số học sinh chọn môn Bóng đá gấp đôi số học sinh chọn môn Bóng chuyền.

Ví dụ 2 Các thành phần của một chai nước ép hoa quả (tính theo tỉ số phần trăm) như sau: việt quất: 60%, táo: 30%, mật ong: 10%.

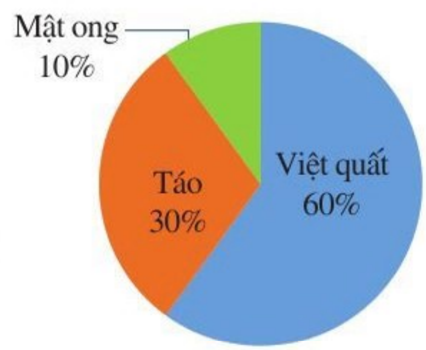
Trong các hình *24a*, *24b*, *24c*, *24d*, ta có thể biểu diễn các số liệu đã cho trên hình nào để nhận được biểu đồ hình quạt tròn thống kê các thành phần của chai nước ép hoa quả trên.

a) *b)* *c)* *d)*

Hình 24

Giải

Vì chai nước ép hoa quả chỉ có 3 thành phần và các thành phần đó có tỉ số phần trăm khác nhau nên chỉ có *Hình 24c* phù hợp để biểu diễn các số liệu trên. Sau khi biểu diễn, ta nhận được biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 25* thống kê các thành phần của chai nước ép hoa quả đó.

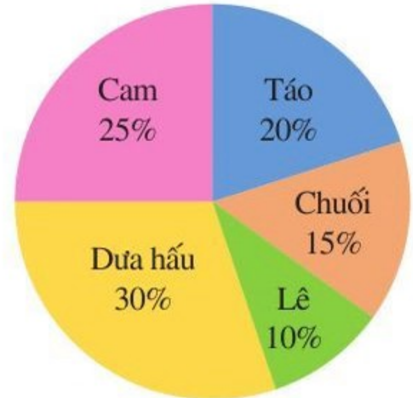


Hình 25

2 Nêu một số dạng biểu diễn của một tập dữ liệu.

Như ta đã biết, dữ liệu thống kê có thể biểu diễn ở những dạng khác nhau, trong đó có biểu đồ hình quạt tròn. Sau đây, ta sẽ làm quen với một ví dụ cụ thể.

Ví dụ 3 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 26* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn loại quả yêu thích nhất trong năm loại: táo, chuối, lê, dưa hấu, cam, của 360 học sinh khối lớp 7 ở một trường trung học cơ sở. Mỗi học sinh chỉ được chọn một loại quả khi được hỏi ý kiến.



Hình 26

a) Lập bảng số liệu thống kê tỉ lệ học sinh yêu thích mỗi loại quả theo mẫu sau:

Loại quả	Táo	Chuối	Lê	Dưa hấu	Cam
Tỉ lệ học sinh (tính theo tỉ số phần trăm)	?	?	?	?	?

b) Lập bảng số liệu thống kê số học sinh yêu thích mỗi loại quả theo mẫu sau:

Loại quả	Táo	Chuối	Lê	Dưa hấu	Cam
Số học sinh	?	?	?	?	?

Giải

a) Từ biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 26*, ta có bảng số liệu sau:

Loại quả	Táo	Chuối	Lê	Dưa hấu	Cam
Tỉ lệ học sinh (tính theo tỉ số phần trăm)	20%	15%	10%	30%	25%

b) Số học sinh chọn táo là:

$$\frac{360 \, . \, 20}{100} = 72 \text{ (học sinh).}$$

Tương tự như trên, số học sinh chọn chuối, lê, dưa hấu, cam lần lượt là:

$$\frac{360 \, . \, 15}{100} = 54; \ \frac{360 \, . \, 10}{100} = 36; \ \frac{360 \, . \, 30}{100} = 108; \ \frac{360 \, . \, 25}{100} = 90.$$

Ta có bảng số liệu thống kê sau:

Loại quả	Táo	Chuối	Lê	Dưa hấu	Cam
Số học sinh	72	54	36	108	90

Nhận xét

Thông thường, trong bảng số liệu, ta có thể nhận biết nhanh chóng số liệu thống kê (theo tiêu chí) của mỗi đối tượng thống kê nhưng không biết được mỗi đối tượng đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê. Ngược lại, trong biểu đồ hình quạt tròn ta có thể nhận biết nhanh chóng mỗi đối tượng thống kê chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê nhưng lại không biết được số liệu thống kê (theo tiêu chí) của mỗi đối tượng đó. Vì thế, tuỳ theo mục đích thống kê ta sẽ lựa chọn bảng số liệu hay biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn dữ liệu thống kê.

II. PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÍ DỮ LIỆU BIỂU DIỄN BẰNG BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

Dựa trên việc biểu diễn dữ liệu bằng biểu đồ hình quạt tròn, ta có thể phân tích và xử lí các dữ liệu đó để tìm ra những thông tin hữu ích và rút ra kết luận.

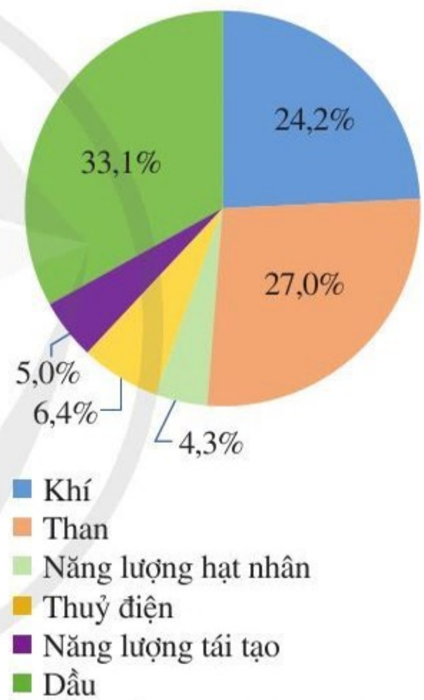
Ví dụ 4 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 27* biểu diễn cơ cấu tiêu dùng các dạng năng lượng của toàn cầu năm 2019.

a) Năng lượng tái tạo tiêu dùng chiếm bao nhiêu phần trăm?

b) Năng lượng hoá thạch (bao gồm than, dầu và khí) tiêu dùng chiếm bao nhiêu phần trăm?

c) Năng lượng hoá thạch tiêu dùng gấp khoảng bao nhiêu lần so với năng lượng tái tạo tiêu dùng?

d) Hãy nêu hậu quả xấu cho môi trường do việc nhân loại tiếp tục sử dụng quá nhiều năng lượng hoá thạch.



(*Nguồn: Statistical Review of World Energy 2020*)

Hình 27

Giải

a) Năng lượng tái tạo tiêu dùng chiếm 5,0% (tổng năng lượng tiêu thụ của toàn cầu năm 2019).

b) Năng lượng hoá thạch tiêu dùng chiếm

$$27,0\% + 33,1\% + 24,2\% = 84,3\%$$

(tổng năng lượng tiêu thụ của toàn cầu năm 2019).

c) Do $84,3\% : 5,0\% = 16,86 \approx 17$ nên năng lượng hoá thạch tiêu dùng gấp khoảng 17 lần so với năng lượng tái tạo tiêu dùng.

d) Việc nhân loại tiếp tục sử dụng quá nhiều năng lượng hoá thạch đã gây ra ô nhiễm môi trường, chẳng hạn: nhà máy nhiệt điện, nhà máy xi măng, xe máy, ô tô, ... khi vận hành đã xả khói bụi vào không khí gây ô nhiễm không khí, ảnh hưởng đến sức khoẻ của con người.

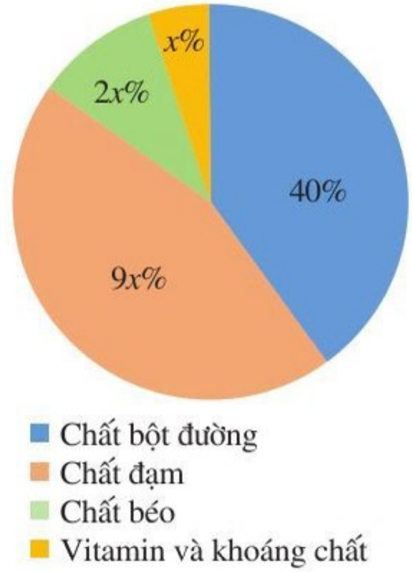
Ví dụ 5 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 28* biểu diễn các thành phần dinh dưỡng có trong một loại thực phẩm (tính theo tỉ số phần trăm).

a) Tính giá trị của x.

b) Tính tỉ số phần trăm của lượng mỗi thành phần dinh dưỡng so với tổng lượng các chất dinh dưỡng có trong loại thực phẩm trên.

c) Giả sử loại thực phẩm trên chứa 120 g chất bột đường. Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

Thành phần dinh dưỡng	Chất bột đường	Chất đạm	Chất béo	Vitamin và khoáng chất
Khối lượng (g)	?	?	?	?



Hình 28

Giải

a) Ta có: $x\% + 2x\% + 9x\% + 40\% = 100\%$, tức là $12x\% = 100\% - 40\% = 60\%$.

Vậy $x = 5$.

b) Tỉ số phần trăm của lượng chất đạm so với tổng lượng các chất dinh dưỡng có trong loại thực phẩm trên là: $9x\% = 9 \,.\, 5\% = 45\%$.

Tương tự như trên, tỉ số phần trăm của lượng chất béo; lượng vitamin và khoáng chất so với tổng lượng các chất dinh dưỡng có trong loại thực phẩm trên lần lượt là:

$$2x\% = 2 \,.\, 5\% = 10\%; \quad x\% = 5\%.$$

c) Vì 120 g chất bột đường chiếm 40% khối lượng các chất dinh dưỡng nên 1% khối lượng các chất dinh dưỡng trong loại thực phẩm trên có khối lượng là: $120 : 40 = 3$ (g).

Khối lượng chất đạm có trong loại thực phẩm trên là: $3 \,.\, 45 = 135$ (g).

Tương tự như trên, khối lượng chất béo; khối lượng vitamin và khoáng chất có trong loại thực phẩm trên lần lượt là:

$$3 \,.\, 10 = 30 \text{ (g)}; \quad 3 \,.\, 5 = 15 \text{ (g)}.$$

Ta có bảng số liệu thống kê sau:

Thành phần dinh dưỡng	Chất bột đường	Chất đạm	Chất béo	Vitamin và khoáng chất
Khối lượng (g)	120	135	30	15

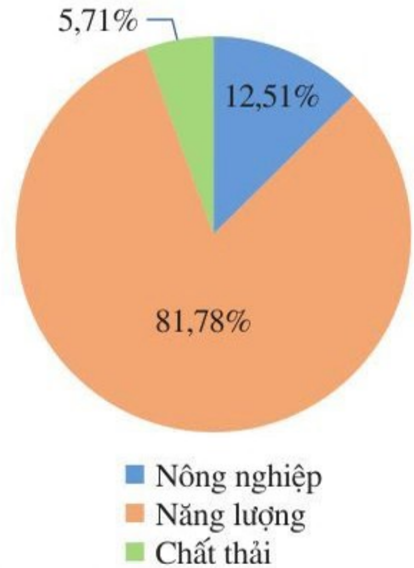
BÀI TẬP

1. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 29* biểu diễn lượng phát thải khí nhà kính trong ba lĩnh vực: Nông nghiệp, Năng lượng, Chất thải vào năm 2020 của Việt Nam (tính theo tỉ số phần trăm).

a) Lĩnh vực nào chiếm tỉ lệ lớn nhất trong việc tạo ra khí nhà kính ở Việt Nam vào năm 2020?

b) Tính lượng khí nhà kính được tạo ra ở từng lĩnh vực của Việt Nam vào năm 2020. Biết rằng tổng lượng phát thải khí nhà kính trong ba lĩnh vực trên của Việt Nam vào năm 2020 là 466 triệu tấn khí carbonic tương đương (tức là những khí nhà kính khác đều được quy đổi về khí carbonic khi tính khối lượng).

c) Nêu một số biện pháp mà chính phủ Việt Nam đã đưa ra nhằm giảm lượng khí thải và giảm bớt tác động của khí nhà kính.



(*Nguồn: https://www.jica.go.jp/project/vietnamese/vietnam/036/activities*)

Hình 29

2. Tổng lượng khí nhà kính đến từ các hoạt động và lĩnh vực kinh doanh ở Singapore vào năm 2020 là (khoảng) 77,2 triệu tấn khí carbonic tương đương. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 30* biểu diễn lượng phát thải khí nhà kính ở từng lĩnh vực của Singapore vào năm 2020 (tính theo tỉ số phần trăm).

a) Tính lượng khí nhà kính được tạo ra ở từng hoạt động và lĩnh vực của Singapore vào năm 2020.

b) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

(*Nguồn: Ban thư kí Quốc gia về Biến đổi khí hậu, Văn phòng Thủ tướng Singapore*)

Hình 30

Hoạt động, lĩnh vực	Công nghiệp	Xây dựng	Vận tải	Hộ gia đình	Hoạt động và các lĩnh vực khác
Lượng khí nhà kính (triệu tấn)	?	?	?	?	?

3. Với dữ liệu đã nêu ở phần mở đầu:

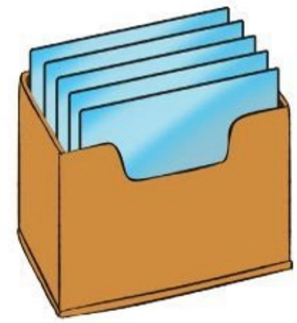
a) Tính khối lượng xuất khẩu mỗi loại gạo: gạo trắng, gạo thơm, gạo nếp của Việt Nam trong năm 2020.

b) Trong năm 2020, Việt Nam xuất khẩu khối lượng gạo trắng nhiều hơn tổng khối lượng gạo thơm và gạo nếp là bao nhiêu triệu tấn?

§5. BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau (*Hình 31*).

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xét sự kiện “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chẵn”.



Hình 31

I. BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

Mỗi xúc xắc có sáu mặt, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

Thực hiện hai hoạt động sau:

1

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

b) Viết tập hợp *A* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

2 Xét sự kiện “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn”.

a) Sự kiện nói trên bao gồm những kết quả nào trong tập hợp *A*?

b) Viết tập hợp *B* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên.

Nhận xét

• Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là:

A = {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}.

• Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn” là: *B* = {mặt 2 chấm; mặt 4 chấm; mặt 6 chấm} (gồm ba phần tử lấy ra từ tập hợp *A*).

• Trong trò chơi trên, sự kiện “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn” còn gọi là *biến cố*, hay gọi đầy đủ là *biến cố ngẫu nhiên.* Sở dĩ ta có thêm cụm từ “ngẫu nhiên” vì các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được.

• Mỗi kết quả: mặt 2 chấm, mặt 4 chấm, mặt 6 chấm (là phần tử của tập hợp B), được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn". Sở dĩ ta gọi những kết quả đó là thuận lợi cho biến cố trên vì chúng *đáp ứng được mong muốn* thể hiện trong biến cố, đó là mặt xuất hiện có số chấm là số chẵn.

Ví dụ 1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

Giải

Trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, có ba số lẻ là: 1, 3, 5.

Vậy có ba kết quả thuận lợi cho biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là: mặt 1 chấm, mặt 3 chấm, mặt 5 chấm (lấy ra từ tập hợp A = {mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}).

1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số nguyên tố". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

II. BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI RÚT THẺ TỪ TRONG HỘP

Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

Thực hiện hai hoạt động sau:

3

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Viết tập hợp C gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

4

Xét sự kiện "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3".

a) Sự kiện nói trên bao gồm những kết quả nào trong tập hợp C?

b) Viết tập hợp D gồm các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên.

Nhận xét

• Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là:

$$C = \{1; 2; 3; ...; 12\}.$$

• Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" là: $D = \{3; 6; 9; 12\}$ (gồm bốn phần tử lấy ra từ tập hợp C).

• Trong trò chơi trên, sự kiện "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" cũng gọi là *biến cố* (hay gọi đầy đủ là *biến cố ngẫu nhiên*).

• Mỗi kết quả: 3, 6, 9, 12 (là phần tử của tập hợp D), được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3".

Ví dụ 2

Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

2 Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp có 12 chiếc thẻ đã nêu ở *Ví dụ 2*. Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số không chia hết cho 3". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

Giải

Trong các số 1, 2, 3, ..., 12, có năm số nguyên tố là: 2, 3, 5, 7, 11.

Vậy có năm kết quả thuận lợi cho biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố" là: 2, 3, 5, 7, 11 (lấy ra từ tập hợp $C = \{1; 2; 3; ...; 12\}$).

BÀI TẬP

1. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

a) Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là hợp số". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

b) Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia 3 dư 1". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là ước của 4". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

2. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 51, 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

a) Viết tập hợp M gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số bé hơn 10". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia cho 4 và 5 đều có số dư là 1". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

3. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số.

a) Viết tập hợp *E* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Xét biến cố "Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho 9". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Xét biến cố "Số tự nhiên được viết ra là bình phương của một số tự nhiên". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

4. Tổ I của lớp 7D có 5 học sinh nữ là: Ánh, Châu, Hương, Hoa, Ngân và 5 học sinh nam là: Bình, Dũng, Hùng, Huy, Việt. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong Tổ I của lớp 7D.

a) Viết tập hợp *P* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với học sinh được chọn ra.

b) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra là học sinh nam". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

5. Một nhóm học sinh quốc tế gồm 9 học sinh đến từ các nước: Việt Nam, Ấn Độ, Ai Cập, Brasil, Canada, Tây Ban Nha, Đức, Pháp, Nam Phi; mỗi nước chỉ có đúng một học sinh. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm học sinh quốc tế trên.

a) Viết tập hợp *G* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với học sinh được chọn ra.

b) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra đến từ châu Á". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra đến từ châu Âu". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

d) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra đến từ châu Mỹ". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

e) Xét biến cố "Học sinh được chọn ra đến từ châu Phi". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

§6. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Xét một con xúc xắc cân đối và đồng chất, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 (*Hình 32*). Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Khi đó khả năng xuất hiện từng mặt của con xúc xắc là như nhau.

Sáu mặt của xúc xắc
Hình 32

Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ".

Làm thế nào để phản ánh được khả năng xảy ra của biến cố trên?

I. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

a) Viết tập hợp A gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

b) Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Tìm tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố trên và số phần tử của tập hợp A.

• *Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là $A = \{$mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm$\}$.*

• *Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố là: mặt 2 chấm, mặt 4 chấm, mặt 6 chấm.*

Vì thế, tỉ số cần tìm là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Như vậy, trong trò chơi trên, đối với biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn" thì tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố đó và số các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn" trong trò chơi trên.

Trong trò chơi gieo xúc xắc như đã trình bày ở trên, ta có:

Xác suất của một biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

Ví dụ 1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

a) Tìm số phần tử của tập hợp A gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

b) Xét biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ". Tính xác suất của biến cố trên.

1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Tính xác suất của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là hợp số".

Giải

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là:

$A = \{$mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm$\}$.

Số phần tử của tập hợp A là 6.

b) Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là: mặt 1 chấm, mặt 3 chấm, mặt 5 chấm.

Vì thế, xác suất của biến cố trên là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Chú ý: Trong trò chơi gieo xúc xắc trên, số các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là 6. Nếu k là số các kết quả thuận lợi cho biến cố thì xác suất của biến cố đó bằng $\frac{k}{6}$.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI RÚT THẺ TỪ TRONG HỘP

2 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp.

a) Viết tập hợp B gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3". Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

c) Tìm tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố trên và số phần tử của tập hợp B.

- *Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là* $B = \{1; 2; 3; ...; 12\}$.
- *Có bốn kết quả thuận lợi cho biến cố là:* 3, 6, 9, 12.

Vì thế, tỉ số cần tìm là $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Như vậy, trong trò chơi trên, đối với biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" thì tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố đó và số các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" trong trò chơi trên.

Trong trò chơi rút thẻ từ trong hộp như đã trình bày ở trên, ta có:

> Xác suất của một biến cố trong trò chơi rút thẻ từ trong hộp bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

Ví dụ 2 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp B gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Xét biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố". Tính xác suất của biến cố trên.

Giải

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là: $B = \{1; 2; 3; ...; 12\}$.

Số phần tử của tập hợp B là 12.

b) Có năm kết quả thuận lợi cho biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố" là: 2, 3, 5, 7, 11. Vì thế, xác suất của biến cố trên là: $\frac{5}{12}$.

2 Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp có 12 chiếc thẻ đã nêu ở *Ví dụ 2*. Tính xác suất của biến cố "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số không chia hết cho 3".

BÀI TẬP

1. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số nguyên tố";

b) "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia 4 dư 1".

2. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 51, 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tìm số phần tử của tập hợp *C* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có một chữ số";

b) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số khi chia cho 4 và 5 đều có số dư là 1";

c) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có tổng các chữ số bằng 4".

3. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tìm số phần tử của tập hợp *D* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số tự nhiên được viết ra là bình phương của một số tự nhiên";

b) "Số tự nhiên được viết ra là bội của 15";

c) "Số tự nhiên được viết ra là ước của 120".

Xác suất của một biến cố trong trò chơi viết ngẫu nhiên một số tự nhiên bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

4. Tổ I của lớp 7D có 5 học sinh nữ là: Ánh, Châu, Hương, Hoa, Ngân và 5 học sinh nam là: Bình, Dũng, Hùng, Huy, Việt. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong Tổ I của lớp 7D. Tìm số phần tử của tập hợp *E* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với học sinh được chọn ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ";

b) "Học sinh được chọn ra là học sinh nam".

Xác suất của một biến cố trong trò chơi chọn ngẫu nhiên một học sinh bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với học sinh được chọn ra.

5. Một nhóm học sinh quốc tế gồm 9 học sinh đến từ các nước: Việt Nam, Ấn Độ, Ai Cập, Brasil, Canada, Tây Ban Nha, Đức, Pháp, Nam Phi; mỗi nước chỉ có đúng một học sinh. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm học sinh quốc tế trên. Tìm số phần tử của tập hợp *G* gồm các kết quả có thể xảy ra đối với học sinh được chọn ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Học sinh được chọn ra đến từ châu Á";

b) "Học sinh được chọn ra đến từ châu Âu";

c) "Học sinh được chọn ra đến từ châu Mỹ";

d) "Học sinh được chọn ra đến từ châu Phi".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Biểu đồ cột ở *Hình 33* biểu diễn kim ngạch xuất khẩu hàng hoá (ước đạt) của tỉnh Bình Dương vào các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.

a) Kim ngạch xuất khẩu hàng hoá năm 2020 của tỉnh Bình Dương tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2016?

b) Trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020, kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của tỉnh Bình Dương trung bình là bao nhiêu tỉ đô la Mỹ?

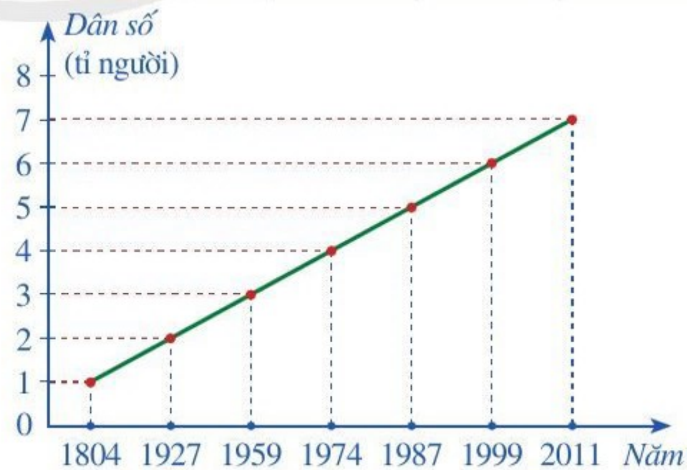
c) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

(Nguồn: Báo cáo của Bộ Công thương từ năm 2016 đến năm 2020)

Hình 33

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của cả nước (tỉ đô la Mỹ)	176,6	214,0	243,5	264,2	282,7
Kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của tỉnh Bình Dương (tỉ đô la Mỹ)	?	?	?	?	?
Tỉ số giữa kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của tỉnh Bình Dương so với kim ngạch xuất khẩu hàng hoá của cả nước	?	?	?	?	?

2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 34* biểu diễn dân số của thế giới vào các năm 1804, 1927, 1959, 1974, 1987, 1999, 2011. Giả sử dân số thế giới tại các năm m và n ($m < n$) lần lượt là a và b. Ta gọi tốc độ tăng dân số từ năm m đến năm n là tỉ số $\frac{b-a}{n-m}$.



(Nguồn: https://danso.org/dan-so-the-gioi)

Hình 34

a) Tính tốc độ tăng dân số thế giới:

– Từ năm 1804 đến năm 1927;

– Từ năm 1999 đến năm 2011.

b) Tốc độ tăng dân số thế giới từ năm 1999 đến năm 2011 gấp bao nhiêu lần tốc độ tăng dân số thế giới từ năm 1804 đến năm 1927?

c) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

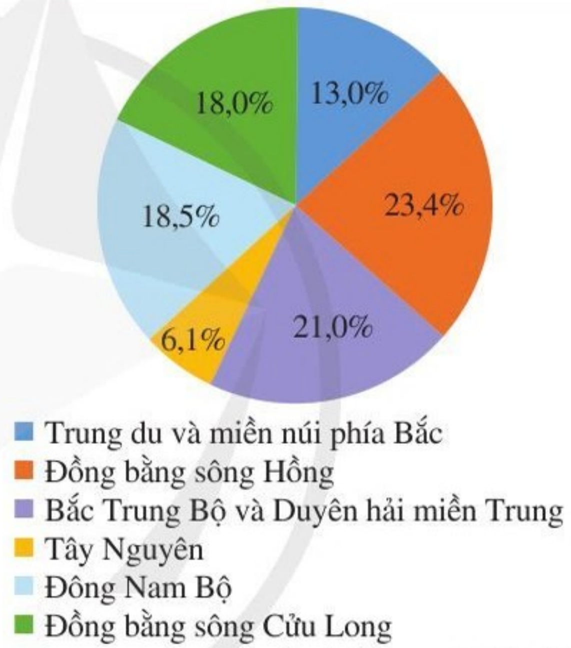
Dân số thế giới tăng (tỉ người)	**Từ 1 lên 2**	**Từ 2 lên 3**	**Từ 3 lên 4**	**Từ 4 lên 5**	**Từ 5 lên 6**	**Từ 6 lên 7**
Thời gian cần thiết (năm)	?	?	?	?	?	?

d) Nêu nhận xét về tốc độ tăng dân số thế giới từ năm 1804 đến năm 2011.

3. Theo kết quả tổng điều tra dân số và nhà ở năm 2019, dân số nước ta là 96 208 984 người và quy mô dân số theo sáu vùng kinh tế – xã hội được biểu diễn bằng biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 35*.

a) Nêu quy mô dân số của mỗi vùng kinh tế – xã hội của nước ta.

b) Vùng kinh tế – xã hội nào có quy mô dân số lớn nhất? Nhỏ nhất?



(*Nguồn: Tổng cục Thống kê*)

Hình 35

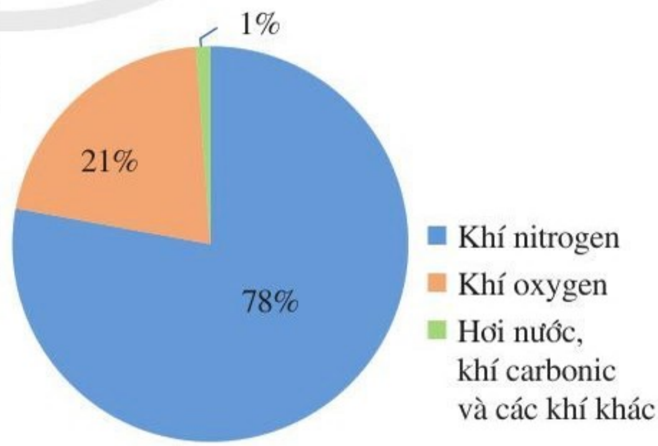
4. Biểu đồ ở *Hình 36* biểu diễn tỉ lệ theo thể tích trong không khí của: khí oxygen; khí nitrogen; hơi nước, khí carbonic và các khí khác.

Quan sát biểu đồ các thành phần của không khí ở *Hình 36* và cho biết trong không khí, có bao nhiêu phần trăm là:

a) Khí nitrogen;

b) Khí oxygen;

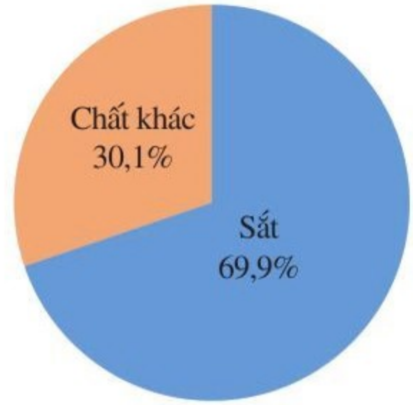
c) Hơi nước, khí carbonic và các khí khác.



(*Nguồn: Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2014*)

Hình 36

5. Quặng sắt là các loại đá và khoáng vật mà từ đó sắt kim loại có thể được chiết ra. Quặng sắt thường giàu các sắt oxit và có màu sắc từ xám sẫm, vàng tươi, tía sẫm tới nâu đỏ. Quặng hematite là loại quặng sắt chính có trong các mỏ của nước Brasil. Tỉ lệ sắt trong quặng hematite được biểu diễn ở *Hình 37*. Trong 8 kg quặng hematite có bao nhiêu ki-lô-gam sắt?



Hình 37

6. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là ước của 6";

b) "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia 3 dư 2".

7. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 51, 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số khi chia cho 17 dư 2 và chia cho 3 dư 1";

b) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chứa chữ số 5".

8. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho cả 2 và 5";

b) "Số tự nhiên được viết ra là số có tổng các chữ số bằng 5".

9. Một đội thanh niên tình nguyện gồm 27 thành viên đến từ các tỉnh: Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng, Phú Yên, Khánh Hoà, Ninh Thuận, Bình Thuận, Bà Rịa – Vũng Tàu, Bình Dương, Bình Phước, Đồng Nai, Tây Ninh, Long An, Tiền Giang, Vĩnh Long, Bến Tre, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Bạc Liêu, Sóc Trăng, Kiên Giang và Cà Mau; mỗi tỉnh chỉ có đúng một thành viên trong đội. Chọn ra ngẫu nhiên một thành viên của đội thanh niên trên. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Tây Nguyên";

b) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Duyên hải miền Trung";

c) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đông Nam Bộ";

d) "Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Cửu Long".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 3
DUNG TÍCH PHỔI

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Giới thiệu về chức năng phổi

Phổi là một bộ phận quan trọng trong cơ thể con người với chức năng chính là giúp khí oxygen trong không khí (chúng ta hít thở) đi vào các tế bào nhằm duy trì hoạt động của cả cơ thể. Một chức năng nữa của phổi là giúp cơ thể loại bỏ khí carbonic khi chúng ta thở ra. Như vậy, phổi là cơ quan đảm nhiệm vai trò cung cấp khí oxygen cho cơ thể, đồng thời vận chuyển khí carbonic ra bên ngoài.

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)

Phổi rất dễ bị tổn thương, đặc biệt là dễ bị nhiễm khuẩn. Để bảo vệ sức khoẻ và duy trì hoạt động của phổi thì cần phải tập thể dục, tập thở thường xuyên; tránh tiếp xúc với các chất ô nhiễm; ngăn ngừa nhiễm trùng; có chế độ sinh hoạt, làm việc và dinh dưỡng hợp lí. Chúng ta cũng cần kiểm tra phổi, trong đó có đo dung tích toàn phổi để kiểm tra chức năng của phổi và kiểm tra khả năng hô hấp.

2. Giới thiệu về dung tích toàn phổi

Dung tích toàn phổi có thể hiểu đơn giản là tổng lượng khí mà phổi của một người có thể chứa được. Đo dung tích toàn phổi là một trong những cách tốt nhất để đo lường chức năng của phổi. Đây cũng là phương pháp phổ biến nhất để kiểm tra chức năng của phổi và kiểm tra khả năng hô hấp.

Để tính dung tích toàn phổi của một người, trong y học, người ta quy định như sau:

• Dung tích toàn phổi (*Total lung capacity*, TLC) là tổng toàn bộ thể tích của các khí trong phổi sau khi đã hít vào tối đa;

• Dung tích sống (*Vital capacity*, VC) là lượng khí thở ra tối đa sau khi đã hít vào tối đa;

• Thể tích cặn (*Residual volume*, RV) là lượng khí còn lại trong phổi sau khi thở ra tối đa.

Khi đó, dung tích toàn phổi được tính theo công thức sau: TLC = VC + RV.

Hiện nay trong y học, để đo dung tích toàn phổi người ta có thể thực hiện như sau:

– Sử dụng máy đo có tên gọi là máy thể tích kí thân (*Body plethysmography*);

– Sử dụng phương pháp pha loãng khí helium.

(*Nguồn: https://vinmec.com*)

Việc đo dung tích toàn phổi thường chỉ được tiến hành ở các cơ sở y tế với những máy móc chuyên dụng.

Để có thể chẩn đoán về khả năng hoạt động của phổi từ số đo dung tích toàn phổi, người ta tiến hành xây dựng các dung tích toàn phổi chuẩn đối với nam, nữ cho từng độ tuổi, đặc biệt là xây dựng các công thức tính dung tích toàn phổi chuẩn.

3. Công thức tính dung tích toàn phổi chuẩn

Từ năm 1962, một số nhà nghiên cứu y học đã đưa ra công thức tính dung tích toàn phổi chuẩn (đơn vị tính: mi-li-lít) đối với nam và nữ trong độ tuổi từ 6 đến 14 tuổi lần lượt là:

Dung tích toàn phổi chuẩn đối với nam là: $30{,}71H + 29{,}35W - 2\,545$;

Dung tích toàn phổi chuẩn đối với nữ là: $30H + 31{,}31W - 2\,536$.

Trong đó: H là chiều cao tính bằng xăng-ti-mét, W là cân nặng tính bằng ki-lô-gam.

(*Nguồn: https://journals.physiology.org/doi/pdf/10.1152/jappl.1962.17.4.601*)

Chẳng hạn, theo công thức trên, dung tích phổi chuẩn của học sinh nam và nữ ở lứa tuổi 13 (với chiều cao và cân nặng cụ thể) được thể hiện trong bảng sau:

Giới tính	Chiều cao (H: cm)	Cân nặng (W: kg)	Dung tích toàn phổi chuẩn (ml)
Nam	156,2	45,3	$3\,581{,}457 \approx 3\,581$
Nữ	156,7	45,8	$3\,598{,}998 \approx 3\,599$

4. Ý nghĩa của đo dung tích toàn phổi

Theo thời gian, dung tích toàn phổi và chức năng phổi của chúng ta sẽ giảm dần kể từ sau 20 tuổi. Vì thế, việc theo dõi sức khoẻ phổi thường xuyên là rất cần thiết đối với mỗi người. Đo dung tích toàn phổi là một trong những cách tốt để theo dõi sức khoẻ phổi. Thông qua số đo đó, chúng ta có giải pháp kịp thời bảo vệ sức khoẻ phổi, giữ cho phổi khoẻ mạnh và cung cấp đủ lượng khí oxygen cần thiết cho cơ thể.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

1 Thực hành tính dung tích toàn phổi chuẩn.

a) Nhiệm vụ

Sử dụng công thức đã nêu, từng học sinh tính dung tích toàn phổi chuẩn của mình, người thân trong gia đình ở độ tuổi từ 6 đến 14 tuổi (nếu điều kiện cho phép).

b) Lập bảng theo mẫu sau:

Họ và tên	Giới tính	Chiều cao	Cân nặng	Dung tích toàn phổi chuẩn
?	?	?	?	?

2 Thực hành tính dung tích toàn phổi chuẩn của từng cá nhân trong nhóm.

a) Nhiệm vụ: Sử dụng công thức đã nêu, thực hành tính dung tích toàn phổi chuẩn của từng cá nhân trong nhóm.

b) Lập bảng theo mẫu sau:

Họ và tên	Giới tính	Chiều cao	Cân nặng	Dung tích toàn phổi chuẩn
?	?	?	?	?

3 Giáo viên tập hợp kết quả của cả lớp (không phổ biến chung các số liệu liên quan đến cá nhân và gia đình học sinh), tiến hành tổng kết, rút kinh nghiệm và đánh giá kết quả thực hành.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

Chương VI

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: biểu thức số, biểu thức đại số; đa thức một biến, nghiệm của đa thức một biến; phép cộng, phép trừ đa thức một biến; phép nhân đa thức một biến; phép chia đa thức một biến.

§1. BIỂU THỨC SỐ. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Các bạn lớp 7A quyên góp tiền mua vở và bút bi để ủng hộ học sinh vùng lũ lụt. Giá mỗi quyển vở là 6 000 đồng, giá mỗi chiếc bút bi là 3 000 đồng.

Nếu mua 15 quyển vở và 10 chiếc bút bi thì hết 120 000 đồng.

Nếu mua 12 quyển vở và 18 chiếc bút bi thì hết 126 000 đồng.

Có thể sử dụng một biểu thức để biểu thị số tiền mua a quyển vở và b chiếc bút bi được không?

I. BIỂU THỨC SỐ

1 Xác định các số và các phép tính có trong mỗi biểu thức.

Biểu thức	Số	Phép tính
$100 - (20 \,.\, 3 + 30 \,.\, 1{,}5)$	?	?
$300 + 300 \cdot \dfrac{1}{50}$	?	?
$2 \,.\, 3^4 : 5$	?	?

Nhận xét

• Các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa) tạo thành một *biểu thức số*. Đặc biệt, mỗi số cũng được coi là một biểu thức số.

• Trong biểu thức số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.

• Khi thực hiện các phép tính trong một biểu thức số, ta nhận được một số. Số đó được gọi là giá trị của biểu thức số đã cho.

Ví dụ 1

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) 0 không phải là biểu thức số.

b) $200 - 200 . 5^6$ là biểu thức số.

Giải

a) Sai.

b) Đúng.

1 Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) 12 . *a* không phải là biểu thức số.

b) Biểu thức số phải có đầy đủ các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa.

Ví dụ 2

Nhà trường cử một đoàn tham gia giải đấu cờ vua gồm: 1 giáo viên phụ trách đoàn; mỗi khối 6, 7, 8, 9 đều có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Biểu thức số nào sau đây biểu thị tổng số thành viên của đoàn?

a) $1 + 4 . 3 + 2$ (thành viên).

b) $1 + 4 . (3 + 2)$ (thành viên).

Giải

Biểu thức số biểu thị tổng số thành viên của đoàn là: $1 + 4 . (3 + 2)$ (thành viên).

Ví dụ 3 Viết biểu thức số biểu thị:

a) Thể tích của hình lập phương có độ dài cạnh là 6 cm;

b) Diện tích của hình thang có độ dài các cạnh đáy là 3 cm, 4 cm và chiều cao 5 cm.

Giải

a) Biểu thức số biểu thị thể tích của hình lập phương có độ dài cạnh 6 cm là: 6^3 (cm^3).

b) Biểu thức số biểu thị diện tích của hình thang có độ dài các cạnh đáy là 3 cm, 4 cm và chiều cao 5 cm là:

$$\frac{1}{2} \cdot (3 + 4) . 5 \ (cm^2).$$

2 Viết biểu thức số biểu thị:

a) Diện tích của hình tam giác có độ dài cạnh đáy là 3 cm, chiều cao tương ứng là 5 cm;

b) Diện tích hình tròn có bán kính là 2 cm.

II. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

2 Viết biểu thức biểu thị:

a) Diện tích hình vuông có độ dài cạnh là x (cm);

b) Số tiền mà bác An phải trả khi mua x (kg) gạo nếp và y (kg) gạo tẻ, biết giá 1 kg gạo nếp là 30 000 đồng và giá 1 kg gạo tẻ là 16 000 đồng.

Biểu thức biểu thị diện tích của hình vuông có độ dài cạnh x (cm) là x^2 (cm^2). Trong biểu thức trên, người ta đã dùng chữ x để viết thay cho một số nào đó (hay còn nói: chữ x đại diện cho một số nào đó). Chữ x thường được gọi là *biến số* (còn gọi tắt là *biến*).

Tương tự như thế, trong biểu thức $30\,000 \,.\, x + 16\,000 \,.\, y$ (đồng) biểu thị số tiền mà bác An phải trả khi mua x (kg) gạo nếp và y (kg) gạo tẻ thì các chữ x, y đại diện cho các số nào đó. Các chữ x, y cũng là các biến số (còn gọi tắt là các biến).

Nhận xét

• Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa làm thành một *biểu thức đại số*. Đặc biệt, biểu thức số cũng là biểu thức đại số.

• Trong biểu thức đại số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.

Chú ý

• Để cho gọn, khi viết các biểu thức đại số ta thường:

+ Không viết dấu nhân giữa các chữ, cũng như giữa số và chữ.

Chẳng hạn: viết xy thay cho $x \,.\, y$; viết $2x$ thay cho $2 \,.\, x$.

+ Viết x thay cho $1 \,.\, x$; viết $-x$ thay cho $(-1) \,.\, x$.

• Trong biểu thức đại số, vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép tính trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép tính như trên các số.

Chẳng hạn: $x + x = 2x$; $x \,.\, x = x^2$; $x + y = y + x$.

Ví dụ 4 Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $3 \,.\, 4 - 2 \,.\, 3$ là biểu thức đại số.

b) $3{,}14a^2$ là biểu thức đại số.

c) $4x + \dfrac{5}{2}y$ không phải là biểu thức đại số.

Giải

a) Đúng. b) Đúng. c) Sai.

3 Cho ví dụ về biểu thức đại số và chỉ rõ biến số (nếu có).

Ví dụ 5 Viết biểu thức đại số biểu thị:

a) Tổng của x và y;

b) Tích của x và y.

Giải

a) Biểu thức đại số biểu thị tổng của x và y là $x + y$.

b) Biểu thức đại số biểu thị tích của x và y là xy.

4 Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

5 Viết biểu thức đại số biểu thị:

a) Tích của tổng x và y với hiệu của x và y;

b) Ba phẩy mười bốn nhân với bình phương của r.

III. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Nhiều tình huống trong cuộc sống dẫn đến việc cần tính giá trị của một biểu thức đại số tại giá trị cho trước của biến. Chẳng hạn, tính số tiền điện phải trả hằng tháng của một gia đình, tính số tiền phải trả khi mua hàng hoá, ...

3 Một ô tô chạy với vận tốc 60 km/h, trong thời gian t (h).

a) Viết biểu thức biểu thị quãng đường S (km) mà ô tô đi được theo t (h).

b) Tính quãng đường S (km) mà ô tô đi được trong thời gian $t = 2$ (h).

- *Biểu thức biểu thị quãng đường S mà ô tô đi được theo thời gian t* (h) *là* $60t$ (km).
- *Thay* $t = 2$ *vào biểu thức trên, ta có quãng đường ô tô đi được trong thời gian* $t = 2$ (h) *là* $S = 60 \,.\, 2 = 120$ (km).

Nhận xét: Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay những giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 6 Tính giá trị của các biểu thức $A = -(2a + b)$, $B = -2a - b$, $C = -2a + b$ tại $a = 2, b = 3$.

Giải

Biểu thức đại số	Biểu thức khi thay $a = 2, b = 3$	Giá trị của biểu thức
$A = -(2a + b)$	$A = -(2 \,.\, 2 + 3)$	$A = -7$
$B = -2a - b$	$B = -2 \,.\, 2 - 3$	$B = -7$
$C = -2a + b$	$C = -2 \,.\, 2 + 3$	$C = -1$

6 Tính giá trị của biểu thức $D = -5xy^2 + 1$ tại $x = 10, y = -3$.

Ví dụ 7 Tính giá trị biểu thức $T = -ab^3c$ tại $a = -5$, $b = -2$, $c = 6$.

Giải

Thay giá trị $a = -5$, $b = -2$, $c = 6$ vào biểu thức đã cho, ta có:

$$T = -(-5) \cdot (-2)^3 \cdot 6 = -240.$$

Ví dụ 8 Khi tính giá trị biểu thức $S = x^2$ tại $x = -2$, bạn Hoa làm như sau:

$$S = -2^2 = -2 \cdot 2 = -4.$$

Theo em, bạn Hoa đã tính đúng chưa? Nếu bạn Hoa tính chưa đúng, em hãy tính lại cho đúng.

Giải

Bạn Hoa làm chưa đúng vì $S = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$.

7

a) Tính $S = -x^2$ tại $x = -3$.

b) Nếu $x \neq 0$ thì $-x^2$ và $(-x)^2$ có bằng nhau không?

Ví dụ 9 Nhiệt độ ở Canada được đo bằng độ Celsius (độ C) nhưng ở Mỹ được đo bằng độ Fahrenheit (độ F). Công thức tính số đo độ F theo số đo độ C là:

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Xét tại một vùng biên giới giữa hai nước Mỹ và Canada:

a) Nếu nhiệt độ của vùng biên giới trên tại một thời điểm là $-10\ ^{o}C$ thì nhiệt độ của vùng đó ở cùng thời điểm trên là bao nhiêu độ F?

b) Nếu nhiệt độ của vùng biên giới trên tại một thời điểm là $68\ ^{o}F$ thì nhiệt độ của vùng đó ở cùng thời điểm trên là bao nhiêu độ C?

c) Giả sử nhiệt độ của vùng biên giới trên vào một ngày đo lúc 4 giờ sáng là $-10\ ^{o}C$, đo lúc 12 giờ trưa là $5\ ^{o}C$. Một người nhận định: "Nhiệt độ của vùng đó từ lúc 4 giờ sáng đến 12 giờ trưa đã tăng thêm $50\ ^{o}F$". Theo em, người đó nhận định có đúng không? Vì sao?

Cầu Cầu Vồng (Biên giới giữa hai nước Mỹ và Canada)

(Nguồn: https://commons.wikimedia.org)

Giải

a) Thay giá trị $C = -10$ (°C) vào biểu thức $F = \frac{9}{5}C + 32$, ta có:

$$F = \frac{9}{5} \cdot (-10) + 32 = 14 \text{ (°F)}.$$

Vậy nhiệt độ của vùng biên giới đó là 14 °F.

b) Thay giá trị $F = 68$ (°F) vào biểu thức $F = \frac{9}{5}C + 32$, ta có: $68 = \frac{9}{5}C + 32$.

Suy ra $\frac{9}{5}C = 36$ hay $C = 20$ (°C).

Vậy nhiệt độ của vùng biên giới đó là 20 °C.

c) Từ lúc 4 giờ sáng đến 12 giờ trưa, nhiệt độ của vùng đó đã tăng

$$5 - (-10) = 15 \text{ (°C)}.$$

Chênh lệch nhiệt độ theo độ F là:

$$F = \frac{9}{5} \cdot 15 + 32 = 59 \text{ (°F)}.$$

Vậy nhận định của người đó không đúng.

BÀI TẬP

1. Một hình chữ nhật có chiều dài là 5 cm, chiều rộng là 6 cm. Biểu thức nào sau đây dùng để biểu thị chu vi hình chữ nhật đó?

a) 2 . 5 + 6 (cm); b) 2 . (5 + 6) (cm).

2. Tính giá trị của biểu thức:

a) $M = 2(a + b)$ tại $a = 2$, $b = -3$;

b) $N = -3xyz$ tại $x = -2$, $y = -1$, $z = 4$;

c) $P = -5x^3y^2 + 1$ tại $x = -1$, $y = -3$.

3. Cho $A = -(-4x + 3y)$, $B = 4x + 3y$, $C = 4x - 3y$. Khi tính giá trị của các biểu thức tại $x = -1$ và $y = -2$, bạn An cho rằng giá trị của các biểu thức A và B bằng nhau, bạn Bình cho rằng giá trị của các biểu thức A và C bằng nhau. Theo em, bạn nào đúng? Vì sao?

4. Nho là một đặc sản của Ninh Thuận. Năm 2021, giá mua nho đỏ Red Cardinal là 45 000 đồng/kg, nho xanh NH01-48 là 70 000 đồng/kg, nho ba màu NH01-152 là 140 000 đồng/kg.

a) Viết biểu thức tính số tiền khi mua x (kg) nho đỏ Red Cardinal, y (kg) nho xanh NH01-48 và t (kg) nho ba màu NH01-152.

b) Tính số tiền khi mua 300 kg nho đỏ Red Cardinal, 250 kg nho xanh NH01-48 và 100 kg nho ba màu NH01-152.

Nho đỏ

Nho xanh

Nho ba màu

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

5. Bạn Quân dự định mua 5 cốc trà sữa có giá x đồng/cốc và 3 lọ sữa chua có giá y đồng/lọ. Khi đến cửa hàng, bạn Quân thấy giá bán trà sữa mà bạn dự định mua đã giảm 10%, còn giá sữa chua thì không thay đổi.

a) Viết biểu thức biểu thị:

– Giá tiền của 1 cốc trà sữa sau khi giảm giá;

– Số tiền mua 5 cốc trà sữa sau khi giảm giá;

– Số tiền mua 3 lọ sữa chua.

b) Bạn Quân mang theo 195 000 đồng. Số tiền này vừa đủ để mua lượng trà sữa và sữa chua như dự định (khi chưa giảm giá). Giá tiền của một cốc trà sữa sau khi đã giảm giá là bao nhiêu? Biết giá một lọ sữa chua là 15 000 đồng.

6. a) Lãi suất ngân hàng quy định cho kì hạn 1 năm là r%/năm. Viết biểu thức đại số biểu thị số tiền lãi khi hết kì hạn 1 năm nếu gửi ngân hàng A đồng.

b) Cô Ngân gửi ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 6%/năm. Hết kì hạn 1 năm, cô Ngân nhận được số tiền lãi là bao nhiêu?

7. Các nhà khoa học đã đưa ra cách ước tính chiều cao của trẻ em khi trưởng thành dựa trên chiều cao b của bố và chiều cao m của mẹ (b, m tính theo đơn vị xăng-ti-mét) như sau:

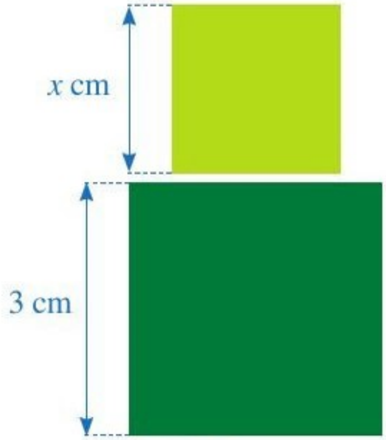
$$\text{Chiều cao của con trai} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}08(b + m);$$

$$\text{Chiều cao của con gái} = \frac{1}{2}(0{,}923b + m).$$

(Nguồn: https://vietnamnet.vn)

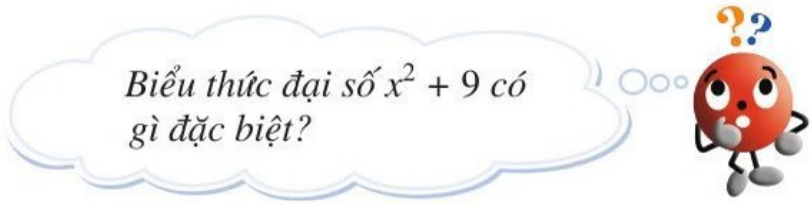
Theo cách ước tính trên, nếu bố cao 170 cm, mẹ cao 160 cm thì chiều cao ước tính của con trai, con gái khi trưởng thành là bao nhiêu?

§2. ĐA THỨC MỘT BIẾN. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN



Hình 1

Trong giờ học môn Mĩ thuật, bạn Hạnh dán lên trang vở hai hình vuông có kích thước lần lượt là 3 cm và x cm như ở *Hình 1*. Tổng diện tích của hai hình vuông đó là $x^2 + 9$ (cm^2).



I. ĐƠN THỨC MỘT BIẾN. ĐA THỨC MỘT BIẾN

1

a) Viết biểu thức biểu thị:

– Diện tích hình vuông có độ dài cạnh là x cm;

– Thể tích của hình lập phương có độ dài cạnh là $2x$ cm.

b) Các biểu thức trên có dạng như thế nào?

Đơn thức một biến là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc tích của một số với luỹ thừa có số mũ nguyên dương của biến đó.

Chẳng hạn, các biểu thức đại số x^2 và $8x^3$ đều là các đơn thức một biến x.

Chú ý

• Mỗi đơn thức (một biến x) nếu không phải là một số thì có dạng ax^k, trong đó a là số thực khác 0 và k là số nguyên dương. Lúc đó, số a được gọi là *hệ số* của đơn thức ax^k.

• Để thuận tiện cho việc thực hiện các phép tính (trên các đơn thức, đa thức, ...), một số thực khác 0 được coi là đơn thức với số mũ của biến bằng 0.

2

a) Viết biểu thức biểu thị:

– Quãng đường ô tô đi được trong thời gian x (h), nếu vận tốc là 60 km/h;

– Tổng diện tích của các hình: hình vuông có độ dài cạnh là $2x$ cm; hình chữ nhật có các kích thước là 3 cm và x cm; hình thoi có độ dài hai đường chéo là 2 cm và 8 cm.

b) Các biểu thức trên có bao nhiêu biến? Mỗi số hạng xuất hiện trong biểu thức có dạng như thế nào?

Đa thức một biến là tổng những đơn thức của cùng một biến.

Chẳng hạn: $3x + 1$ là đa thức của biến x;

$$y^2 - 2y + \frac{3}{4} \text{ là đa thức của biến } y.$$

Chú ý

• Mỗi số được xem là một đa thức (một biến). Số 0 được gọi là *đa thức không*. Mỗi đơn thức cũng là một đa thức.

• Thông thường ta kí hiệu đa thức một biến x là $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ hoặc $A(x)$, $B(x)$, ...

Ví dụ 1 Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến x?

a) 0; b) $5x^2 - \frac{3}{2}x - 2$; c) $\frac{3}{x} + 1$.

Giải

a) 0 là đa thức một biến x.

b) $5x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ là đa thức một biến x.

c) $\frac{3}{x} + 1$ không phải là đa thức một biến x.

1 Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến?

a) $x^2 + 9$;

b) $\frac{2}{x^2} + 2x + 1$;

c) $3x + \frac{2}{5}y$.

II. CỘNG, TRỪ ĐƠN THỨC CÓ CÙNG SỐ MŨ CỦA BIẾN

3 Cho hai đơn thức của cùng biến x là $2x^2$ và $3x^2$.

a) So sánh số mũ của biến x trong hai đơn thức trên.

b) Thực hiện phép cộng $2x^2 + 3x^2$.

c) So sánh kết quả của hai phép tính: $2x^2 + 3x^2$ và $(2 + 3)x^2$.

Ta có: $2x^2 + 3x^2 = (x^2 + x^2) + (x^2 + x^2 + x^2)$

$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2.$

Vì vậy $2x^2 + 3x^2 = 5x^2 = (2 + 3)x^2$.

Để cộng (hay trừ) hai đơn thức có cùng số mũ của biến, ta cộng (hay trừ) hai hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến:

$$ax^k + bx^k = (a + b)x^k;\ ax^k - bx^k = (a - b)x^k\ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Ví dụ 2 Thực hiện mỗi phép tính sau:

a) $9x + 7x$; b) $5x^3 - x^3$.

Giải

a) $9x + 7x = (9 + 7)x = 16x$.

b) $5x^3 - x^3 = 5x^3 - 1x^3 = (5 - 1)x^3 = 4x^3$.

2 Thực hiện mỗi phép tính sau:

a) $x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 5x^2$;

b) $y^4 + 6y^4 - \frac{2}{5}y^4$.

III. SẮP XẾP ĐA THỨC MỘT BIẾN

1. Thu gọn đa thức

4 Cho đa thức $P(x) = x^2 + 2x^2 + 6x + 2x - 3$.

a) Nêu các đơn thức của biến x có trong đa thức $P(x)$.

b) Tìm số mũ của biến x trong từng đơn thức nói trên.

c) Thực hiện phép cộng các đơn thức có cùng số mũ của biến x sao cho trong đa thức $P(x)$ không còn hai đơn thức nào có cùng số mũ của biến x.

Nhận xét: Thu gọn đa thức một biến là làm cho đa thức đó không còn hai đơn thức nào có cùng số mũ của biến.

Ví dụ 3 Thu gọn đa thức

$Q(x) = 2x^2 - 4x^2 + 2x^3 + x^3 + 3x - 4x - 1$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^2 - 4x^2 + 2x^3 + x^3 + 3x - 4x - 1 \\ &= (2x^2 - 4x^2) + (2x^3 + x^3) + (3x - 4x) - 1 \\ &= -2x^2 + 3x^3 - x - 1. \end{aligned}$$

Vậy dạng thu gọn của đa thức $Q(x)$ là $-2x^2 + 3x^3 - x - 1$.

3 Thu gọn đa thức

$P(y) = -2y^3 + y + \frac{11}{7}y^3 + 3y^2 - 5 - 6y^2 + 9$.

2. Sắp xếp một đa thức

5 Cho đa thức $R(x) = -2x^2 + 3x^2 + 6x + 8x^4 - 1$.

a) Thu gọn đa thức $R(x)$.

b) Trong dạng thu gọn của đa thức $R(x)$, sắp xếp các đơn thức theo số mũ giảm dần của biến.

Sắp xếp đa thức (một biến) theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến là sắp xếp các đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức đó theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến.

Chú ý: Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của mỗi đơn thức được gọi là hệ số của đa thức đó.

Biến

$4x^2 + 3x + 8$

Hệ số

Ví dụ 4 Sắp xếp đa thức $G(x) = -6x^7 + 4x + 8x^9 - 1$ theo:

a) Số mũ giảm dần của biến;

b) Số mũ tăng dần của biến.

Giải

a) $G(x) = 8x^9 - 6x^7 + 4x - 1$.

b) $G(x) = -1 + 4x - 6x^7 + 8x^9$.

4 Sắp xếp đa thức $H(x) = -0{,}5x^8 + 4x^3 + 5x^{10} - 1$ theo:

a) Số mũ giảm dần của biến;

b) Số mũ tăng dần của biến.

IV. BẬC CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

6 Cho đa thức $P(x) = 9x^4 + 8x^3 - 6x^2 + x - 1 - 9x^4$.

a) Thu gọn đa thức $P(x)$.

b) Tìm số mũ cao nhất của x trong dạng thu gọn của $P(x)$.

Số mũ cao nhất của x trong dạng thu gọn của P(x) là 3.

Ta nói bậc của đa thức P(x) là 3.

Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó.

Chú ý: Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của luỹ thừa với số mũ cao nhất của biến còn gọi là *hệ số cao nhất* của đa thức; số hạng không chứa biến còn gọi là *hệ số tự do* của đa thức.

Ví dụ 5 Cho đa thức $Q(x) = 9x^4 + 6x - 3x^5 - 1$.

a) Sắp xếp đa thức $Q(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm bậc của đa thức $Q(x)$.

c) Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức $Q(x)$.

Giải

a) Ta có: $Q(x) = -3x^5 + 9x^4 + 6x - 1$.

b) Bậc của đa thức $Q(x)$ là 5 vì số mũ cao nhất của x trong đa thức $Q(x)$ là 5.

c) Đa thức $Q(x)$ có hệ số cao nhất là -3 và hệ số tự do là -1.

Chú ý

- Một số khác 0 là đa thức bậc 0.
- Đa thức không (số 0) không có bậc.

5 Cho đa thức

$$R(x) = -1\,975x^3 + 1\,945x^4 + 2\,021x^5 - 4{,}5.$$

a) Sắp xếp đa thức $R(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm bậc của đa thức $R(x)$.

c) Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức $R(x)$.

V. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

7

a) Tính giá trị của biểu thức đại số $3x - 2$ tại $x = 2$.

b) Tính giá trị của đa thức $P(x) = -4x + 6$ tại $x = -3$.

Nhận xét: Giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = a$ được kí hiệu là $P(a)$.

Ví dụ 6 Cho đa thức $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$. Tính $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$.

Giải. Ta có:

$P(0) = -2 \,.\, 0^3 + 3 \,.\, 0^2 + 0 - 1 = -1$;

$P(1) = -2 \,.\, 1^3 + 3 \,.\, 1^2 + 1 - 1 = 1$;

$P(-1) = -2 \,.\, (-1)^3 + 3 \,.\, (-1)^2 + (-1) - 1 = 3$.

8 Cho đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Tính $P(1)$, $P(2)$.

Ta nói $x = 1$ và $x = 2$ là hai nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

$x = a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(a) = 0$.

Ví dụ 7 Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x = 2$ là nghiệm của đa thức $P(x) = 2x - 4$.

b) $y = -3$ là nghiệm của đa thức $Q(y) = -2y + 6$.

c) $t = 1$ là nghiệm của đa thức $R(t) = -t^2 - 1$.

Giải

a) Vì $P(2) = 2 . 2 - 4 = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm của đa thức $P(x)$. Phát biểu đó là đúng.

b) Vì $Q(-3) = (-2) . (-3) + 6 = 12 \neq 0$ nên $y = -3$ không là nghiệm của đa thức $Q(y)$. Phát biểu đó là sai.

c) Vì $R(1) = -1^2 - 1 = -2 \neq 0$ nên $t = 1$ không là nghiệm của đa thức $R(t)$. Phát biểu đó là sai.

6 Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x = 4$ và $x = -4$ là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 16$.

b) $y = -2$ là nghiệm của đa thức $Q(y) = -2y^3 + 4$.

Ví dụ 8 Mỗi phần tử của tập hợp $\{-2; 2\}$ có là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - 4$ hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $Q(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$ nên -2 là nghiệm của đa thức $Q(x)$;

$Q(2) = 2^2 - 4 = 0$ nên 2 là nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Chú ý: Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm. Số nghiệm của một đa thức không vượt quá bậc của đa thức đó.

BÀI TẬP

1. Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến? Tìm biến và bậc của đa thức đó.

a) $-2x$;

b) $-x^2 - x + \frac{1}{2}$;

c) $\frac{4}{x^2 + 1} + x^2$;

d) $y^2 - \frac{3}{y} + 1$;

e) $-6z + 8$;

g) $-2t^{2021} + 3t^{2020} + t - 1$.

2. Thực hiện mỗi phép tính sau:

a) $\frac{4}{9}x + \frac{2}{3}x$;

b) $-12y^2 + 0,7y^2$;

c) $-21t^3 - 25t^3$.

3. Cho hai đa thức:

$$P(y) = -12y^4 + 5y^4 + 13y^3 - 6y^3 + y - 1 + 9;$$

$$Q(y) = -20y^3 + 31y^3 + 6y - 8y + y - 7 + 11.$$

a) Thu gọn mỗi đa thức trên rồi sắp xếp mỗi đa thức theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của mỗi đa thức đó.

4. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng tỏ rằng:

a) $P(0) = c$; b) $P(1) = a + b + c$; c) $P(-1) = a - b + c$.

5. Kiểm tra xem:

a) $x = 2$, $x = \frac{4}{3}$ có là nghiệm của đa thức $P(x) = 3x - 4$ hay không;

b) $y = 1$, $y = 4$ có là nghiệm của đa thức $Q(y) = y^2 - 5y + 4$ hay không.

6. Theo tiêu chuẩn của Tổ chức Y tế Thế giới (WHO), đối với bé gái, công thức tính cân nặng chuẩn là $C = 9 + 2(N - 1)$ (kg), công thức tính chiều cao chuẩn là $H = 75 + 5(N - 1)$ (cm), trong đó N là số tuổi của bé gái.

(Nguồn: http://sankom.vn)

a) Tính cân nặng chuẩn, chiều cao chuẩn của một bé gái 3 tuổi.

b) Một bé gái 3 tuổi nặng 13,5 kg và cao 86 cm. Bé gái đó có đạt tiêu chuẩn về cân nặng và chiều cao của Tổ chức Y tế Thế giới hay không?

7. Nhà bác học Galileo Galilei (1564 – 1642) là người đầu tiên phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian chuyển động. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (m) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Trong một thí nghiệm vật lí, người ta thả một vật nặng từ độ cao 180 m xuống đất (coi sức cản của không khí không đáng kể).

a) Sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách mặt đất 100 m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

c) Sau bao lâu thì vật chạm đất?

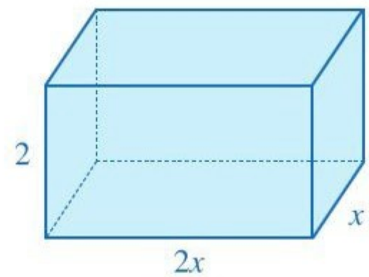
8. Pound là một đơn vị đo khối lượng truyền thống của Anh, Mỹ và một số quốc gia khác. Công thức tính khối lượng y (kg) theo x (pound) là: $y = 0{,}45359237x$.

a) Tính giá trị của y (kg) khi $x = 100$ (pound).

b) Một hãng hàng không quốc tế quy định mỗi hành khách được mang hai va li không tính cước; mỗi va li cân nặng không vượt quá 23 kg. Hỏi với va li cân nặng 50,99 pound sau khi quy đổi sang ki-lô-gam và được phép làm tròn đến hàng đơn vị thì có vượt quá quy định trên hay không?

§3. PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

Một số tình huống trong cuộc sống dẫn đến việc cộng, trừ hai đa thức một biến, chẳng hạn, ta phải tính tổng diện tích các mặt của hình hộp chữ nhật (*Hình 2*) có độ dài hai cạnh đáy là x (m), $2x$ (m) và chiều cao là 2 (m).



Hình 2

Phép cộng, phép trừ hai đa thức một biến được thực hiện như thế nào?

I. CỘNG HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

1

a) Thực hiện phép cộng trong mỗi trường hợp sau: $5x^2 + 7x^2$; $ax^k + bx^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

b) Nêu quy tắc cộng hai đơn thức có cùng số mũ của biến.

2 Cho hai đa thức

$$P(x) = 5x^2 + 4 + 2x \text{ và } Q(x) = 8x + x^2 + 1.$$

a) Sắp xếp các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm đơn thức thích hợp trong dạng thu gọn của $P(x)$ và $Q(x)$ cho $\boxed{?}$ ở bảng sau rồi cộng hai đơn thức theo từng cột và thể hiện kết quả ở dòng cuối cùng của mỗi cột:

Đa thức	Đơn thức có số mũ 2 của biến (Đơn thức chứa x^2)	Đơn thức có số mũ 1 của biến (Đơn thức chứa x)	Số hạng tự do (Đơn thức không chứa x)
$P(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
$Q(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
$R(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$

c) Dựa vào kết quả cộng hai đơn thức theo từng cột, xác định đa thức $R(x)$.

Ta có: $R(x) = 6x^2 + 10x + 5$. Ta gọi $R(x)$ là tổng của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$, kí hiệu là $R(x) = P(x) + Q(x)$.

Nhận xét: Để cộng hai đa thức một biến (theo cột dọc), ta có thể làm như sau:

- Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
- Đặt hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột;
- Cộng hai đơn thức trong từng cột, ta có tổng cần tìm.

Ví dụ 1 Tính tổng của hai đa thức:

$$P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \text{ và } Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2.$$

Giải. Ta có:

$$\begin{array}{rl} + \begin{array}{r} P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2 \end{array} & \text{Đặt hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột} \\ \hline P(x) + Q(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 3 & \longleftarrow \text{Cộng hai đơn thức trong từng cột} \end{array}$$

Ví dụ 2 Khi đặt phép cộng hai đa thức:

$$P(x) = 2x^2 + 6x - 1 \text{ và } Q(x) = 5x^2 + 6,$$

bạn Hoà viết như sau:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} P(x) = 2x^2 + \;\; 6x - 1 \\ Q(x) = 5x^2 + \;\; 6 \quad\;\; \end{array} \\ \hline P(x) + Q(x) = 7x^2 + 12x - 1 \end{array}$$

Theo em, bạn Hoà viết như vậy đúng chưa? Vì sao? Nếu chưa đúng, em hãy sửa lại cho đúng.

Giải

Cách làm của bạn Hoà chưa đúng. Lí do: Vì các đơn thức $6x$ và 6 không có cùng số mũ của biến nên chúng không được viết ở cùng cột.

Cách viết đúng là:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} P(x) = 2x^2 + 6x - 1 \\ Q(x) = 5x^2 \qquad\;\; + 6 \end{array} \\ \hline P(x) + Q(x) = 7x^2 + 6x + 5 \end{array}$$

1 Để cộng hai đa thức $P(x)$, $Q(x)$, bạn Dũng viết như dưới đây có đúng không? Vì sao? Nếu chưa đúng, em hãy sửa lại cho đúng.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} P(x) = \;\; 6x^2 + 3x - 1 \\ Q(x) = \;\; 8x^2 + 6 \;\; + 2x \end{array} \\ \hline P(x) + Q(x) = 14x^2 + 9x + 1 \end{array}$$

Chú ý: Khi cộng đa thức theo cột dọc, nếu một đa thức khuyết số mũ nào của biến thì khi viết đa thức đó, ta bỏ trống cột tương ứng với số mũ trên.

3 Cho hai đa thức:

$$P(x) = -2x^2 + 1 + 3x \text{ và } Q(x) = -5x + 3x^2 + 4.$$

a) Sắp xếp các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Viết tổng $P(x) + Q(x)$ theo hàng ngang.

c) Nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau.

d) Tính tổng $P(x) + Q(x)$ bằng cách thực hiện phép tính trong từng nhóm.

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (-2x^2 + 3x + 1) + (3x^2 - 5x + 4) \\ &= -2x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 5x + 4 \\ &= (-2x^2 + 3x^2) + (3x - 5x) + (1 + 4) \\ &= x^2 - 2x + 5. \end{aligned}$$

Nhận xét: Để cộng hai đa thức một biến (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau:

- Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
- Viết tổng hai đa thức theo hàng ngang;
- Nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau;
- Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được tổng cần tìm.

Ví dụ 3 Tính tổng của hai đa thức:

$$P(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

và $$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (-4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) + (2x^3 - 3x^2 + 2x + 2) \\ &= -4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ &= (-4x^3 + 2x^3) + (2x^2 - 3x^2) + (4x + 2x) + (1 + 2) \\ &= -2x^3 - x^2 + 6x + 3. \end{aligned}$$

2 Tính tổng của hai đa thức sau bằng hai cách:

$$P(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x - 2;$$

$$Q(x) = -8x^3 + 4x^2 + 6 + 3x.$$

II. TRỪ HAI ĐA THỨC MỘT BIẾN

4

a) Thực hiện phép trừ trong mỗi trường hợp sau: $2x^2 - 6x^2$; $ax^k - bx^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

b) Nêu quy tắc trừ hai đơn thức có cùng số mũ của biến.

5 Cho hai đa thức:

$$P(x) = 4x^2 + 1 + 3x \text{ và } Q(x) = 5x + 2x^2 + 3.$$

a) Sắp xếp các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm đơn thức thích hợp trong dạng thu gọn của đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ cho $\boxed{?}$ ở bảng sau rồi trừ hai đơn thức theo từng cột và thể hiện kết quả ở dòng cuối cùng của mỗi cột:

Đa thức	Đơn thức có số mũ 2 của biến (Đơn thức chứa x^2)	Đơn thức có số mũ 1 của biến (Đơn thức chứa x)	Số hạng tự do (Đơn thức không chứa x)
$P(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
$Q(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
$S(x)$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$

c) Dựa vào kết quả trừ hai đơn thức theo từng cột, xác định đa thức $S(x)$.

Ta có: $S(x) = 2x^2 - 2x - 2$. Ta gọi $S(x)$ là hiệu của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$, kí hiệu là

$$S(x) = P(x) - Q(x).$$

Nhận xét: Để trừ đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ (theo cột dọc), ta có thể làm như sau:

- Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
- Đặt hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột sao cho đơn thức của $P(x)$ ở trên và đơn thức của $Q(x)$ ở dưới;
- Trừ hai đơn thức trong từng cột, ta có hiệu cần tìm.

Ví dụ 4 Cho hai đa thức:

$$P(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \text{ và } Q(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 2.$$

Tính hiệu $P(x) - Q(x)$.

Giải. Ta có:

$$\begin{array}{rl} - & P(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ & Q(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 2 \\ \hline & P(x) - Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

Đặt hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột

Trừ hai đơn thức trong từng cột

Ví dụ 5 Cho đa thức $P(x) = x^4 - 4x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

Tìm đa thức $Q(x)$ sao cho: $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 - 1$.

Giải. Ta có:

$$Q(x) = (x^5 - 2x^2 - 1) - P(x).$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^5 & & -2x^2 & & -1 \\ - & & x^4 & -4x^2 & -2x & +\dfrac{1}{2} \\ \hline Q(x) = & x^5 & -x^4 & +2x^2 & +2x & -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

3 Cho hai đa thức:

$$P(x) = 2x^2 - 5x - \frac{1}{3}$$

và $Q(x) = -6x^4 + 5x^2 + \dfrac{2}{3} + 3x$.

Tính hiệu $P(x) - Q(x)$.

6 Cho hai đa thức:

$$P(x) = -3x^2 + 2 + 7x \text{ và } Q(x) = -4x + 5x^2 + 1.$$

a) Sắp xếp các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Viết hiệu $P(x) - Q(x)$ theo hàng ngang, trong đó đa thức $Q(x)$ được đặt trong dấu ngoặc.

c) Sau khi bỏ dấu ngoặc và đổi dấu mỗi đơn thức của đa thức $Q(x)$, nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau.

d) Tính hiệu $P(x) - Q(x)$ bằng cách thực hiện phép tính trong từng nhóm.

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (-3x^2 + 7x + 2) - (5x^2 - 4x + 1) \\ &= -3x^2 + 7x + 2 - 5x^2 + 4x - 1 \\ &= (-3x^2 - 5x^2) + (7x + 4x) + (2 - 1) \\ &= -8x^2 + 11x + 1. \end{aligned}$$

Nhận xét: Để trừ đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau:

- Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;

• Viết hiệu $P(x) - Q(x)$ theo hàng ngang, trong đó đa thức $Q(x)$ được đặt trong dấu ngoặc;

• Sau khi bỏ dấu ngoặc và đổi dấu mỗi đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức $Q(x)$, nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau;

• Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được hiệu cần tìm.

Ví dụ 6 Cho hai đa thức:

$$P(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x + 1$$

và $$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x + 3.$$

Tính hiệu $P(x) - Q(x)$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (-x^3 + 3x^2 + 4x + 1) - (3x^3 + 4x^2 - 6x + 3) \\ &= -x^3 + 3x^2 + 4x + 1 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 3 \\ &= (-x^3 - 3x^3) + (3x^2 - 4x^2) + (4x + 6x) + (1 - 3) \\ &= -4x^3 - x^2 + 10x - 2. \end{aligned}$$

4 Tính hiệu $P(x) - Q(x)$ bằng hai cách, trong đó:

$$P(x) = 6x^3 + 8x^2 + 5x - 2;$$

$$Q(x) = -9x^3 + 6x^2 + 3 + 2x.$$

BÀI TẬP

1. Cho hai đa thức: $R(x) = -8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ và $S(x) = x^4 - 8x^3 + 2x + 3$. Tính:

a) $R(x) + S(x)$; b) $R(x) - S(x)$.

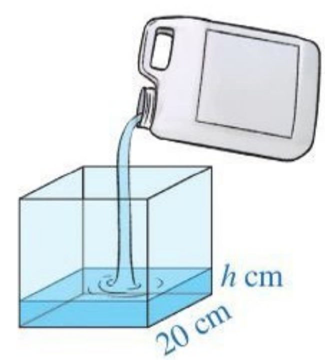
2. Xác định bậc của hai đa thức là tổng, hiệu của:

$$A(x) = -8x^5 + 6x^4 + 2x^2 - 5x + 1 \text{ và } B(x) = 8x^5 + 8x^3 + 2x - 3.$$

3. Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ nhất 90 triệu đồng với kì hạn 1 năm, lãi suất x%/năm. Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ hai 80 triệu đồng với kì hạn 1 năm, lãi suất $(x + 1,5)$%/năm. Hết kì hạn 1 năm, bác Ngọc có được cả gốc và lãi là bao nhiêu:

a) Ở ngân hàng thứ hai? b) Ở cả hai ngân hàng?

4. Người ta rót nước từ một can đựng 10 lít nước sang một bể rỗng có dạng hình lập phương với độ dài cạnh 20 cm. Khi mực nước trong bể cao h (cm) thì thể tích nước trong can còn lại là bao nhiêu? Biết rằng 1 lít = 1 dm^3.



5. Bạn Minh cho rằng "Tổng của hai đa thức bậc bốn luôn luôn là đa thức bậc bốn". Bạn Quân cho rằng "Hiệu của hai đa thức bậc bốn luôn luôn là đa thức bậc bốn". Hai bạn Minh và Quân nói như vậy có đúng không? Giải thích vì sao.

§4. PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN

Trong quá trình biến đổi và tính toán những biểu thức đại số, nhiều khi ta phải thực hiện phép nhân hai đa thức một biến, chẳng hạn ta cần thực hiện phép nhân sau:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Làm thế nào để thực hiện được phép nhân hai đa thức một biến?

I. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐƠN THỨC

1 Thực hiện phép tính:

a) $x^2 . x^4$; b) $3x^2 . x^3$; c) $ax^m . bx^n$ $(a \neq 0; b \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$.

Muốn nhân đơn thức A với đơn thức B, ta làm như sau:

- Nhân hệ số của đơn thức A với hệ số của đơn thức B;
- Nhân luỹ thừa của biến trong A với luỹ thừa của biến đó trong B;
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

$$ax^m . bx^n = a . b . x^m . x^n = abx^{m+n}$$

$(a \neq 0; b \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$.

Ví dụ 1 Tính:

a) $2x^3 . 5x^4$;

b) $-4x^m . 6x^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Giải

a) $2x^3 . 5x^4 = 2 . 5 . x^3 . x^4 = 10x^{3+4} = 10x^7$.

b) $-4x^m . 6x^n = (-4) . 6 . x^m . x^n = -24x^{m+n}$.

1 Tính:

a) $3x^5 . 5x^8$;

b) $-2x^{m+2} . 4x^{n-2}$ $(m, n \in \mathbb{N}; n > 2)$.

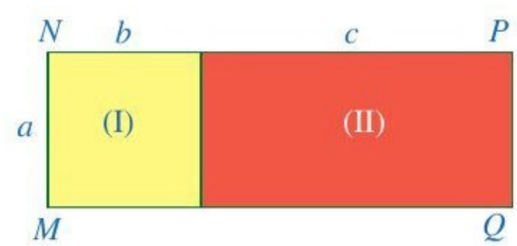
II. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

2 Quan sát hình chữ nhật $MNPQ$ ở *Hình 3*.

a) Tính diện tích mỗi hình chữ nhật (I), (II);

b) Tính diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$;

c) So sánh: $a(b + c)$ và $ab + ac$.



Hình 3

Kết quả của câu c giải thích một quy tắc đã biết: Muốn nhân một số với một tổng, ta có thể nhân số đó với từng số hạng của tổng rồi cộng các tích với nhau.

$A(B + C) = AB + AC$

$A(B - C) = AB - AC$

3 Cho đơn thức $P(x) = 2x$

và đa thức $Q(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

a) Hãy nhân đơn thức $P(x)$ với từng đơn thức của đa thức $Q(x)$.

b) Hãy cộng các tích vừa tìm được.

$$\begin{aligned} 2x \,.\, (3x^2 + 4x + 1) &= 2x \,.\, 3x^2 + 2x \,.\, 4x + 2x \,.\, 1 \\ &= 2 \,.\, 3 \,.\, x \,.\, x^2 + 2 \,.\, 4 \,.\, x \,.\, x + 2 \,.\, 1 \,.\, x \\ &= 6x^3 + 8x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng đơn thức của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Ví dụ 2 Tính:

a) $x(4x - 3)$;

b) $-3x^2(6x^2 - 8x + 7)$.

Giải

a) $x(4x - 3) = x \,.\, 4x - x \,.\, 3 = 4x^2 - 3x$.

b) $-3x^2(6x^2 - 8x + 7) = (-3x^2) \,.\, 6x^2 - (-3x^2) \,.\, 8x + (-3x^2) \,.\, 7 = -18x^4 + 24x^3 - 21x^2$.

2 Tính:

a) $\frac{1}{2}x(6x - 4)$;

b) $-x^2\left(\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{1}{4}\right)$.

III. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

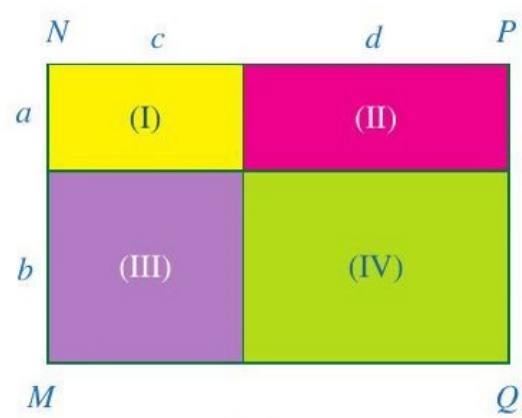
4 Quan sát hình chữ nhật $MNPQ$ ở *Hình 4*.

a) Tính diện tích mỗi hình chữ nhật (I), (II), (III), (IV).

b) Tính diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$.

c) So sánh:

$(a + b)(c + d)$ và $ac + ad + bc + bd$.



Hình 4

Kết quả của câu c giải thích một quy tắc đã biết: Muốn nhân một tổng với một tổng, ta có thể nhân mỗi số hạng của tổng này với từng số hạng của tổng kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

5 Cho đa thức $P(x) = 2x + 3$ và đa thức $Q(x) = x + 1$.

a) Hãy nhân mỗi đơn thức của đa thức $P(x)$ với từng đơn thức của đa thức $Q(x)$.

b) Hãy cộng các tích vừa tìm được.

$$(2x + 3)(x + 1) = 2x \,.\, x + 2x \,.\, 1 + 3 \,.\, x + 3 \,.\, 1$$
$$= 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3.$$

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi đơn thức của đa thức này với từng đơn thức của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

Nhận xét: Tích của hai đa thức là một đa thức.

Ví dụ 3 Tính tích của hai đa thức:

$P(x) = x^2 + x + 1$ và $Q(x) = x^2 - x + 1$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned}P(x) \,.\, Q(x) &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)\\ &= x^2 \,.\, x^2 - x^2 \,.\, x + x^2 \,.\, 1 + x \,.\, x^2 - x \,.\, x + x \,.\, 1 + 1 \,.\, x^2 - 1 \,.\, x + 1 \,.\, 1\\ &= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1\\ &= x^4 + x^2 + 1.\end{aligned}$$

3 Tính:

a) $(x^2 - 6)(x^2 + 6)$;

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Chú ý

• Sau khi thực hiện phép nhân hai đa thức, ta thường viết đa thức tích ở dạng thu gọn và sắp xếp các đơn thức theo số mũ tăng dần hoặc giảm dần của biến.

• Chúng ta có thể trình bày phép nhân $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ theo cột dọc như sau:

$$\begin{array}{rrrrrl} & & x^2 & +x & +1 & \\ \times & & x^2 & -x & +1 & \text{Viết đa thức này dưới đa thức kia}\\ \hline & & x^2 & +x & +1 & \leftarrow \text{Kết quả của phép nhân } 1 \text{ với } x^2 + x + 1\\ & -x^3 & -x^2 & -x & & \leftarrow \text{Kết quả của phép nhân } -x \text{ với } x^2 + x + 1\\ x^4 & +x^3 & +x^2 & & & \leftarrow \text{Kết quả của phép nhân } x^2 \text{ với } x^2 + x + 1\\ \hline x^4 & & +x^2 & & +1 & \leftarrow \text{Cộng theo từng cột}\end{array}$$

Khi thực hiện phép nhân hai đa thức theo cột dọc, các đơn thức có cùng số mũ (của biến) được xếp vào cùng một cột.

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{6}{5}x^3$;

b) $y^2\left(\frac{5}{7}y^3 - 2y^2 + 0,25\right)$;

c) $(2x^2 + x + 4)(x^2 - x - 1)$;

d) $(3x - 4)(2x + 1) - (x - 2)(6x + 3)$.

2. Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của mỗi đa thức sau:

a) $P(x) = (-2x^2 - 3x + x - 1)(3x^2 - x - 2)$;

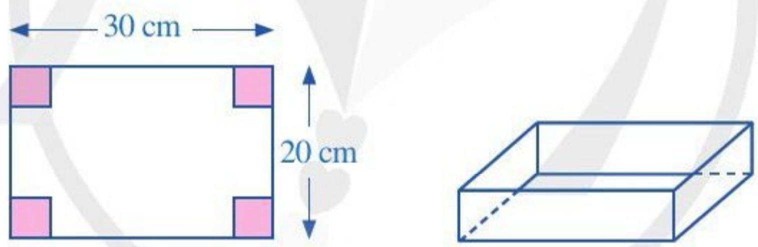
b) $Q(x) = (x^5 - 5)(-2x^6 - x^3 + 3)$.

3. Xét đa thức $P(x) = x^2(x^2 + x + 1) - 3x(x - a) + \frac{1}{4}$ (với a là một số).

a) Thu gọn đa thức $P(x)$ rồi sắp xếp đa thức đó theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm a sao cho tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng $\frac{5}{2}$.

4. Từ tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 20 cm và 30 cm, bạn Quân cắt đi ở mỗi góc của tấm bìa một hình vuông sao cho bốn hình vuông bị cắt đi có cùng độ dài cạnh, sau đó gấp lại để tạo thành hình hộp chữ nhật không nắp (*Hình 5*). Viết đa thức biểu diễn thể tích của hình hộp chữ nhật được tạo thành theo độ dài cạnh của hình vuông bị cắt đi.



Hình 5

5. *Ảo thuật với đa thức*

Bạn Hạnh bảo bạn Ngọc:

"– Nếu bạn lấy tuổi của một người bất kì cộng thêm 5;

– Được bao nhiêu đem nhân với 2;

– Lấy kết quả đó cộng với 10;

– Nhân kết quả vừa tìm được với 5;

– Đọc kết quả cuối cùng sau khi trừ đi 100. Mình sẽ đoán được tuổi của người đó."

Em hãy sử dụng kiến thức nhân đa thức để giải thích vì sao bạn Hạnh lại đoán được tuổi người đó.

§5. PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN

Trong quá trình biến đổi và tính toán những biểu thức đại số, nhiều khi ta phải thực hiện phép chia một đa thức (một biến) cho một đa thức (một biến) khác, chẳng hạn ta cần thực hiện phép chia sau: $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

Làm thế nào để thực hiện được phép chia một đa thức cho một đa thức khác?

I. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

1 Thực hiện phép tính:

a) $x^5 : x^3$; b) $(4x^3) : x^2$; c) $(ax^m) : (bx^n)$ $(a \neq 0; b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, m \geq n)$.

Muốn chia đơn thức *A* cho đơn thức *B* ($B \neq 0$) khi số mũ của biến trong *A* lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong *B*, ta làm như sau:
- Chia hệ số của đơn thức *A* cho hệ số của đơn thức *B*;
- Chia luỹ thừa của biến trong *A* cho luỹ thừa của biến đó trong *B*;
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

$$(ax^m) : (bx^n) = \frac{a}{b} \cdot (x^m : x^n) = \frac{a}{b} \cdot x^{m-n}$$

$(a \neq 0;\ b \neq 0;\ m, n \in \mathbb{N};\ m \geq n)$.

Ví dụ 1 Tính:

a) $(12x^4) : (6x^2)$;

b) $(-24x^m) : (6x^n)$ $(m, n \in \mathbb{N}, m \geq n)$.

Giải

a) $(12x^4) : (6x^2) = (12 : 6) . (x^4 : x^2) = 2x^{4-2} = 2x^2$.

b) $(-24x^m) : (6x^n) = [(-24) : 6] . (x^m : x^n) = -4x^{m-n}$.

1 Tính:

a) $(3x^6) : (0,5x^4)$;

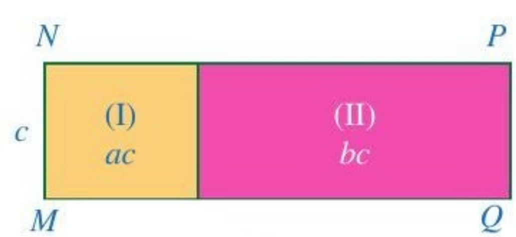
b) $(-12x^{m+2}) : (4x^{n+2})$ $(m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$.

II. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

2 Ở *Hình 6*, diện tích các hình chữ nhật (I), (II) lần lượt là $A = ac$, $B = bc$. Biết $MN = c$.

a) Tính *NP*.

b) So sánh: $(A + B) : c$ và $A : c + B : c$.



Hình 6

Kết quả của câu b giải thích một quy tắc đã biết: Muốn chia một tổng cho một số khác 0, ta có thể chia từng số hạng của tổng cho số đó rồi cộng các thương với nhau.

$(A + B) : C = A : C + B : C$

$(A - B) : C = A : C - B : C$

3 Cho đa thức $P(x) = 4x^2 + 3x$ và đơn thức $Q(x) = 2x$.

a) Hãy chia từng đơn thức (của biến x) có trong đa thức $P(x)$ cho đơn thức $Q(x)$.

b) Hãy cộng các thương vừa tìm được.

$$(4x^2 + 3x) : (2x) = (4x^2) : (2x) + (3x) : (2x)$$
$$= (4 : 2) . (x^2 : x) + \frac{3}{2} \cdot (x : x) = 2x + \frac{3}{2}.$$

Muốn chia đa thức P cho đơn thức Q ($Q \neq 0$) khi số mũ của biến ở mỗi đơn thức của P lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong Q, ta chia mỗi đơn thức của đa thức P cho đơn thức Q rồi cộng các thương với nhau.

Ví dụ 2 Tính: $(9x^6 + 6x^4 - x^2) : (3x^2)$.

Giải

$(9x^6 + 6x^4 - x^2) : (3x^2)$

$= (9x^6) : (3x^2) + (6x^4) : (3x^2) - (x^2) : (3x^2)$

$= (9 : 3) . (x^6 : x^2) + (6 : 3) . (x^4 : x^2) - \frac{1}{3} \cdot (x^2 : x^2) = 3x^4 + 2x^2 - \frac{1}{3}.$

2 Tính:

$\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x\right) : \left(-\frac{1}{8}x\right).$

III. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

Trong mục này, ta sẽ làm quen với cách chia đa thức cho đa thức khi bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia.

4 Thực hiện phép chia:

a) $(2x^2 + 5x + 2) : (2x + 1)$; b) $(3x^3 - 5x^2 + 2) : (x^2 + 1)$.

Để thực hiện phép chia đa thức trên, ta làm như sau:

a)
$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 5x + 2 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\;\; 2x^2 + x & x + 2 \\ \cline{1-1} 4x + 2 & \\ -\;\; 4x + 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

• Lấy $2x^2$ chia cho $2x$ được x, viết x;
Lấy x nhân với $2x + 1$ được $2x^2 + x$, viết $2x^2 + x$;
Lấy $2x^2 + 5x + 2$ trừ đi $2x^2 + x$ được $4x + 2$, viết $4x + 2$.

• Lấy $4x$ chia cho $2x$ được 2, viết 2;
Lấy 2 nhân với $2x + 1$ được $4x + 2$, viết $4x + 2$;
Lấy $4x + 2$ trừ đi $4x + 2$ được 0, viết 0.

Vậy $(2x^2 + 5x + 2) : (2x + 1) = x + 2$.

b)
$$
\begin{array}{rl|l}
- & 3x^3 - 5x^2 \qquad + 2 & x^2 + 1 \\
 & 3x^3 \qquad + 3x & \overline{3x - 5} \\
\hline
- & -5x^2 - 3x + 2 & \\
 & -5x^2 \qquad - 5 & \\
\hline
 & -3x + 7 &
\end{array}
$$

• Lấy $3x^3$ chia cho x^2 được $3x$, viết $3x$;
Lấy $3x$ nhân với $x^2 + 1$ được $3x^3 + 3x$, viết $3x^3 + 3x$;
Lấy $3x^3 - 5x^2 + 2$ trừ đi $3x^3 + 3x$ được $-5x^2 - 3x + 2$, viết $-5x^2 - 3x + 2$.

• Lấy $-5x^2$ chia cho x^2 được -5, viết -5;
Lấy -5 nhân với $x^2 + 1$ được $-5x^2 - 5$, viết $-5x^2 - 5$;
Lấy $-5x^2 - 3x + 2$ trừ đi $-5x^2 - 5$ được $-3x + 7$, viết $-3x + 7$.

• Đến đây, ta thấy bậc của đa thức $-3x + 7$ (bằng 1) nhỏ hơn bậc của đa thức chia (bằng 2) nên phép chia không thể tiếp tục được.

Vậy $(3x^3 - 5x^2 + 2) : (x^2 + 1) = 3x - 5$ (dư $-3x + 7$).

Nói cách khác, ta có: $3x^3 - 5x^2 + 2 = (x^2 + 1) . (3x - 5) + (-3x + 7)$.

Để chia một đa thức cho một đa thức khác đa thức không (cả hai đa thức đều đã thu gọn và sắp xếp các đơn thức theo số mũ giảm dần của biến) khi bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia, ta làm như sau:

Bước 1

• Chia đơn thức bậc cao nhất của đa thức bị chia cho đơn thức bậc cao nhất của đa thức chia

• Nhân kết quả trên với đa thức chia và đặt tích dưới đa thức bị chia sao cho hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột

• Lấy đa thức bị chia trừ đi tích đặt dưới để được đa thức mới

Bước 2. Tiếp tục quá trình trên cho đến khi nhận được đa thức không hoặc đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia.

Ví dụ 3 Tính:

a) $(6x^2 - 13x + 6) : (-3x + 2)$;

b) $(8x^2 - 10x + 5) : (-2x + 1)$.

3 Tính:

a) $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1)$;

b) $(8x^3 - 6x^2 + 5) : (x^2 - x + 1)$.

Giải

a)
$$
\begin{array}{rl|l}
- & 6x^2 - 13x + 6 & -3x + 2 \\
 & 6x^2 - \ \ 4x & \overline{-2x + 3} \\
\hline
- & -\ 9x + 6 & \\
 & -\ 9x + 6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Vậy $(6x^2 - 13x + 6) : (-3x + 2) = -2x + 3$.

Ta còn viết:
$6x^2 - 13x + 6$
$= (-3x + 2)(-2x + 3)$.

b)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8x^2 - 10x + 5 & -2x + 1 \\
 - & 8x^2 - 4x & \overline{-4x + 3} \\
\hline
 & \quad -6x + 5 & \\
 - & \quad -6x + 3 & \\
\hline
 & \qquad\quad 2 &
\end{array}
$$

Vậy $(8x^2 - 10x + 5) : (-2x + 1) = -4x + 3$ (dư 2).

Ta còn viết:

$8x^2 - 10x + 5$

$= (-2x + 1)(-4x + 3) + 2.$

Nhận xét

• Khi chia đa thức A cho đa thức B của cùng một biến ($B \neq 0$), có hai khả năng xảy ra:

– Phép chia có dư bằng 0. Trong trường hợp này ta nói đa thức A chia hết cho đa thức B.

– Phép chia có dư là đa thức R ($R \neq 0$) với bậc của R nhỏ hơn bậc của B. Phép chia trong trường hợp này được gọi là phép chia có dư.

• Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức tuỳ ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \,.\, Q + R$, trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B. Như vậy, đa thức A chia hết cho đa thức B khi và chỉ khi $R = 0$.

BÀI TẬP

Tính (từ Bài 1 đến Bài 4):

1. a) $(4x^3) : (-2x^2)$; b) $(-7x^2) : (6x)$; c) $(-14x^4) : (-8x^3)$.

2. a) $(8x^3 + 2x^2 - 6x) : (4x)$; b) $(5x^3 - 4x) : (-2x)$; c) $(-15x^6 - 24x^3) : (-3x^2)$.

3. a) $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$; b) $(x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 + x)$;
c) $(-16x^4 + 1) : (-4x^2 + 1)$; d) $(-32x^5 + 1) : (-2x + 1)$.

4. a) $(6x^2 - 2x + 1) : (3x - 1)$; b) $(27x^3 + x^2 - x + 1) : (-2x + 1)$;
c) $(8x^3 + 2x^2 + x) : (2x^3 + x + 1)$; d) $(3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 1) : (3x + 1)$.

5. Một công ty sau khi tăng giá 30 nghìn đồng mỗi sản phẩm so với giá ban đầu là $2x$ (nghìn đồng) thì có doanh thu là $6x^2 + 170x + 1\,200$ (nghìn đồng). Tính số sản phẩm mà công ty đó đã bán được theo x.

6. Một hình hộp chữ nhật có thể tích là $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (cm^3). Biết đáy là hình chữ nhật có các kích thước là $x + 1$ (cm) và $x + 2$ (cm). Tính chiều cao của hình hộp chữ nhật đó theo x.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến? Tìm biến và bậc của đa thức đó.

a) $-7x+5$;

b) $2\,021x^2-2\,022x+2\,023$;

c) $2y^3-\dfrac{3}{y+2}+4$;

d) $-2t^m+8t^2+t-1$, với m là số tự nhiên lớn hơn 2.

2. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=-5a-b-20$ tại $a=-4$, $b=18$;

b) $B=-8xyz+2xy+16y$ tại $x=-1$, $y=3$, $z=-2$;

c) $C=-x^{2\,021}y^2+9x^{2\,021}$ tại $x=-1$, $y=-3$.

3. Viết đa thức trong mỗi trường hợp sau:

a) Đa thức bậc nhất có hệ số của biến bằng -2 và hệ số tự do bằng 6;

b) Đa thức bậc hai có hệ số tự do bằng 4;

c) Đa thức bậc bốn có hệ số của luỹ thừa bậc 3 của biến bằng 0;

d) Đa thức bậc sáu trong đó tất cả hệ số của luỹ thừa bậc lẻ của biến đều bằng 0.

4. Kiểm tra xem trong các số -1, 0, 1, 2, số nào là nghiệm của mỗi đa thức sau:

a) $3x-6$;

b) x^4-1;

c) $3x^2-4x$;

d) x^2+9.

5. Cho đa thức $P(x)=-9x^6+4x+3x^5+5x+9x^6-1$.

a) Thu gọn đa thức $P(x)$.

b) Tìm bậc của đa thức $P(x)$.

c) Tính giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x=-1$; $x=0$; $x=1$.

6. Tính:

a) $-2x^2+6x^2$;

b) $4x^3-8x^3$;

c) $3x^4(-6x^2)$;

d) $(-24x^6):(-4x^3)$.

7. Tính:

a) $(x^2+2x+3)+(3x^2-5x+1)$;

b) $(4x^3-2x^2-6)-(x^3-7x^2+x-5)$;

c) $-3x^2(6x^2-8x+1)$;

d) $(4x^2+2x+1)(2x-1)$;

e) $(x^6-2x^4+x^2):(-2x^2)$;

g) $(x^5-x^4-2x^3):(x^2+x)$.

8. Cho hai đa thức:

$$A(x) = 4x^4 + 6x^2 - 7x^3 - 5x - 6 \text{ và } B(x) = -5x^2 + 7x^3 + 5x + 4 - 4x^4.$$

a) Tìm đa thức $M(x)$ sao cho $M(x) = A(x) + B(x)$.

b) Tìm đa thức $C(x)$ sao cho $A(x) = B(x) + C(x)$.

9. Cho $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ và $Q(x) = x^4 - 1$. Tìm đa thức $A(x)$ sao cho $P(x) . A(x) = Q(x)$.

10. Nhân dịp lễ Giáng sinh, một cửa hàng bán quần áo trẻ em thông báo khi mua mỗi bộ quần áo sẽ được giảm giá 30% so với giá niêm yết. Giả sử giá niêm yết một bộ quần áo là x (đồng). Viết biểu thức tính số tiền phải trả khi mua loại quần áo đó với số lượng:

a) 1 bộ; b) 3 bộ; c) y bộ.

11. Một doanh nghiệp kinh doanh cà phê nhận thấy: Sau khi rang xong, khối lượng cà phê giảm 12% so với trước khi rang.

a) Tìm số thích hợp cho $\boxed{?}$ ở bảng sau:

Khối lượng x (kg) cà phê trước khi rang	**Khối lượng hao hụt khi rang (kg)**	**Khối lượng y (kg) cà phê sau khi rang**
1	?	?
2	?	?
3	?	?

b) Tìm công thức chỉ mối liên hệ giữa x và y.

c) Để có được 2 tấn cà phê sau khi rang thì doanh nghiệp cần sử dụng bao nhiêu tấn cà phê trước khi rang?

12. Một công ty sau khi tăng giá 50 nghìn đồng mỗi sản phẩm so với giá ban đầu là x (nghìn đồng) với $x < 60$ thì có doanh thu là $-5x^2 + 50x + 15\,000$ (nghìn đồng). Tính số sản phẩm mà công ty đã bán được theo x.

13. Một công ty du lịch tổ chức đi tham quan cho một nhóm khách 50 người với mức giá 400 nghìn đồng/người. Công ty đặt ra chính sách khuyến mãi như sau: Sẽ giảm giá cho mỗi người 10 nghìn đồng khi cứ có thêm 1 khách tham gia ngoài 50 khách trên.

a) Giả sử số khách tham gia thêm là x ($x < 40$). Tính số tiền mà công ty thu được theo x.

b) Nếu số khách tăng thêm là 10 người thì số tiền công ty thu được là tăng hay giảm so với số tiền thu được chỉ với 50 khách ban đầu?

Chương VII
TAM GIÁC

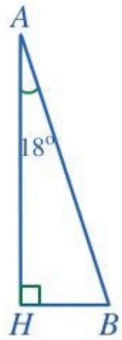
Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: tổng các góc của một tam giác; quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác; bất đẳng thức tam giác; hai tam giác bằng nhau; các trường hợp bằng nhau của hai tam giác; tam giác cân; đường vuông góc và đường xiên; đường trung trực của một đoạn thẳng; tính chất ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác.

§1. TỔNG CÁC GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Toà tháp Capital Gate (thuộc Các Tiểu vương quốc A-rập Thống nhất) nghiêng 18° so với phương thẳng đứng (góc nghiêng biểu diễn như *Hình 1*). Tính đến ngày 01/6/2020, toà tháp này là toà tháp nghiêng nhiều nhất trên thế giới.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Toà tháp Capital Gate



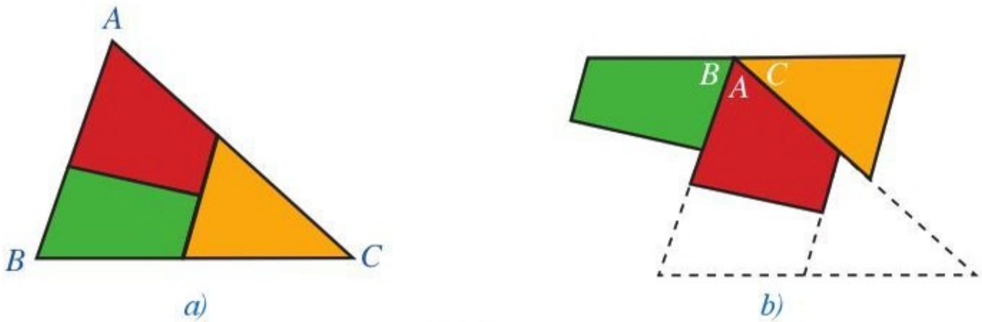
Hình 1

(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Làm thế nào để biết được độ nghiêng của toà tháp Capital Gate so với phương nằm ngang?

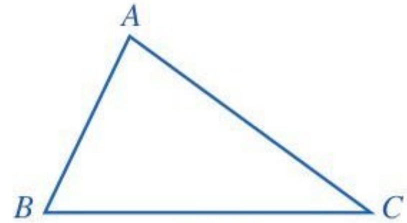
1 Cắt tam giác ABC thành ba mảnh (*Hình 2a*) và ghép lại (*Hình 2b*). Quan sát *Hình 2b* và dự đoán tổng ba góc A, B, C.

Lưu ý: Để cho gọn, ta gọi tổng số đo của các góc là tổng các góc đó. Cũng như vậy đối với hiệu hai góc.



Hình 2

Ta có *định lí* sau (*Hình 3*):

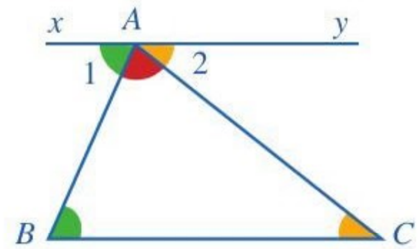


Hình 3

> Tổng ba góc của một tam giác bằng 180°.

GT	ΔABC
KL	$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

Chứng minh: (*Hình 4*)



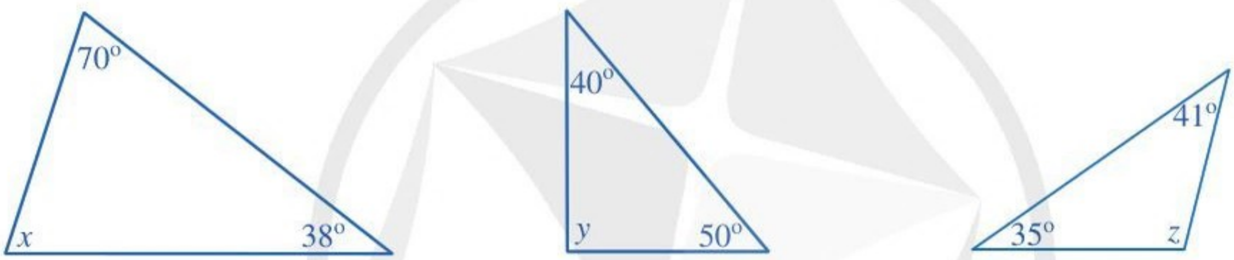
Hình 4

Qua điểm A, kẻ đường thẳng xy song song với BC.

Ta có: $\widehat{B} = \widehat{A_1}$, $\widehat{C} = \widehat{A_2}$ (so le trong).

Vậy $\widehat{BAC} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{BAC} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$.

Ví dụ 1 Tính số đo của góc chưa biết trong mỗi trường hợp sau:



a) *b)* *c)*

Hình 5

Giải

a) Ở *Hình 5a*, ta có:

$x + 70^\circ + 38^\circ = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác).

Suy ra: $x + 108^\circ = 180^\circ$.

Vậy $x = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

b) Ở *Hình 5b*, ta có:

$y + 40^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác).

Suy ra: $y + 90^\circ = 180^\circ$.

Vậy $y = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

c) Ở *Hình 5c*, ta có:

$z + 35^\circ + 41^\circ = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác).

Suy ra: $z + 76^\circ = 180^\circ$.

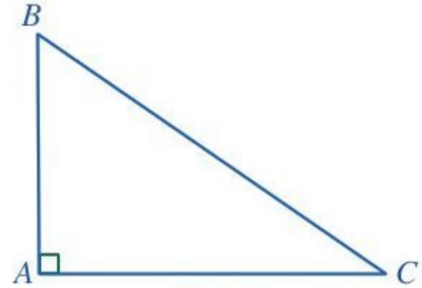
Vậy $z = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

> **1** Cho tam giác đều ABC. Tính số đo mỗi góc của tam giác đó.

Chú ý

- Tam giác ở *Hình 5a* có ba góc cùng nhọn. Tam giác như vậy gọi là *tam giác nhọn.*
- Tam giác ở *Hình 5b* có một góc vuông. Tam giác như vậy gọi là *tam giác vuông.*
- Tam giác ở *Hình 5c* có một góc tù. Tam giác như vậy gọi là *tam giác tù.*

2 Cho tam giác ABC vuông tại A. Tổng hai góc B và C bằng bao nhiêu độ?



Hình 6

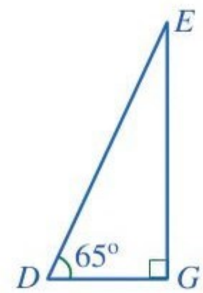
Nhận xét

Tổng hai góc nhọn trong một tam giác vuông bằng 90°.

Trong tam giác ABC ở *Hình 6*, ta có: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^{\circ}$.

Ví dụ 2 *Hình 7* biểu diễn một chiếc thang dựa vào tường. Tính độ nghiêng của chiếc thang đó so với bức tường, biết rằng độ nghiêng của chiếc thang đó so với mặt đất là 65°.

Hình 7



Hình 8

Giải

Ta vẽ tam giác vuông DEG (*Hình 8*) để mô tả hình ảnh chiếc thang dựa vào tường trong *Hình 7*.

Trong tam giác DEG vuông tại G, ta có: $\widehat{D} + \widehat{E} = 90^{\circ}$ (tổng hai góc nhọn trong một tam giác vuông).

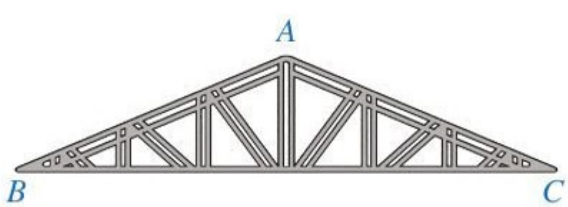
Suy ra: $\widehat{E} = 90^{\circ} - \widehat{D} = 90^{\circ} - 65^{\circ} = 25^{\circ}$.

Vậy độ nghiêng của chiếc thang so với bức tường là 25°.

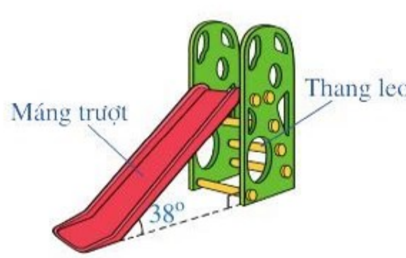
2 Trong bài toán nêu ở phần mở đầu, hãy tính độ nghiêng của toà tháp Capital Gate so với phương nằm ngang.

BÀI TẬP

1. Một khung thép có dạng hình tam giác ABC với số đo các góc ở đỉnh B và đỉnh C cùng bằng 23° (*Hình 9*). Tính số đo của góc ở đỉnh A.



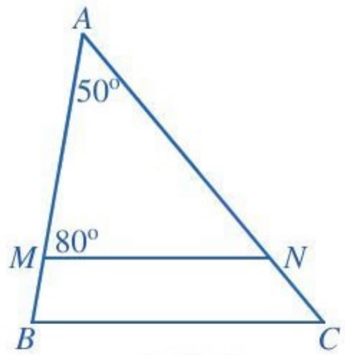
Hình 9



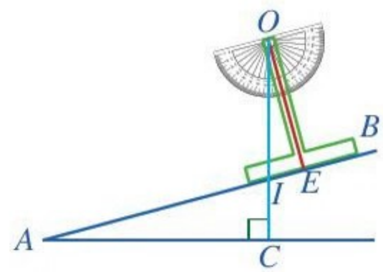
Hình 10

2. *Hình 10* biểu diễn một chiếc cầu trượt gồm máng trượt và thang leo. Tính độ nghiêng của máng trượt so với phương thẳng đứng, biết rằng độ nghiêng của máng trượt so với mặt đất là 38°.

3. Trong *Hình 11*, $MN \parallel BC$. Tính số đo góc C.



Hình 11



Hình 12

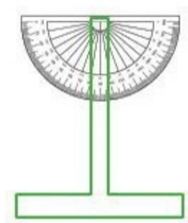
4. *Hình 12* biểu diễn mặt cắt đứng của một đường lên dốc AB. Để đo độ dốc của con đường biểu diễn bởi góc nhọn BAC tạo bởi đường thẳng AB với phương nằm ngang AC, người ta làm như sau:

– Làm một thước chữ T như *Hình 13*;

– Đặt thước chữ T dọc theo cạnh AB như *Hình 12*, $OE \perp AB$;

– Buộc một sợi dây vào chân O của thước chữ T và buộc một vật nặng vào đầu dây còn lại, sau đó thả vật nặng để sợi dây có phương thẳng đứng (trong xây dựng gọi là thả dây dọi);

– Tính góc BAC, biết rằng dây dọi OI tạo với trục OE của thước chữ T một góc 15°.



Hình 13

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Góc ngoài của tam giác

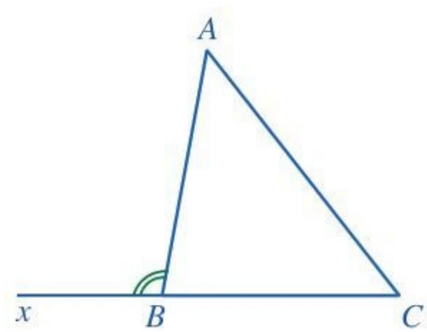
– Các góc CAB, ABC, BCA được gọi là *góc trong* của tam giác ABC (*Hình 14*).

– *Góc ngoài* của một tam giác là góc kề bù với một góc trong của tam giác đó.

Chẳng hạn trong *Hình 14*, góc xBA là một góc ngoài của tam giác ABC.

– Ta có thể chứng minh được: Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

Chẳng hạn trong *Hình 14*, ta có: $\widehat{xBA} = \widehat{A} + \widehat{C}$.

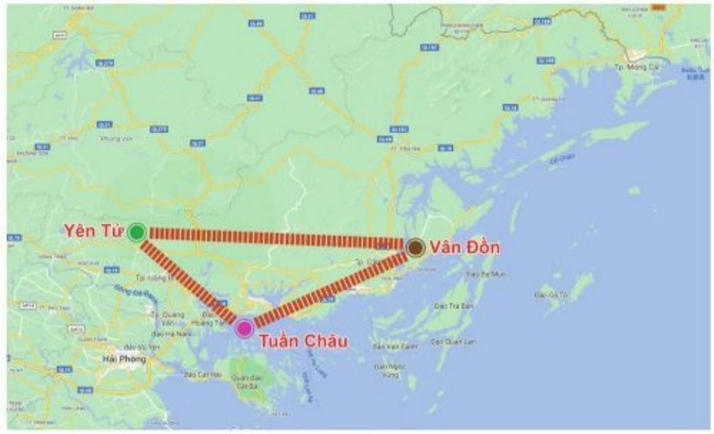


Hình 14

§2. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Hình 15 minh hoạ vị trí của ba khu du lịch Yên Tử, Tuần Châu và Vân Đồn (ở tỉnh Quảng Ninh).

Trong hai vị trí Yên Tử và Tuần Châu, vị trí nào gần Vân Đồn hơn?



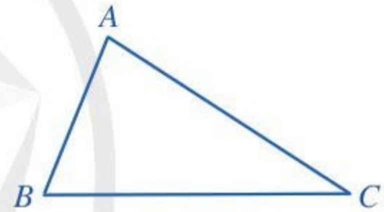
(*Nguồn: https://google.com/maps*)

Hình 15

I. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

1. Góc đối diện với cạnh lớn hơn

Trong tam giác ABC (*Hình 16*), góc A được gọi là *góc đối diện* với cạnh BC. Tương tự, góc B được gọi là góc đối diện với cạnh CA, góc C được gọi là góc đối diện với cạnh AB.

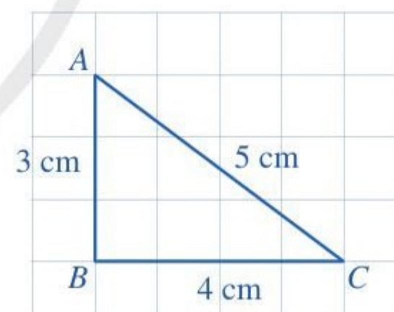


Hình 16

1 Quan sát tam giác ABC ở *Hình 17*.

a) So sánh hai cạnh AB và AC.

b) So sánh góc B (đối diện với cạnh AC) và góc C (đối diện với cạnh AB).



Hình 17

> Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Trong tam giác ABC, nếu $AC > AB$ thì $\widehat{B} > \widehat{C}$ (*Hình 16*).

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm. So sánh hai góc A và C.

Giải

Ta có: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm (giả thiết).

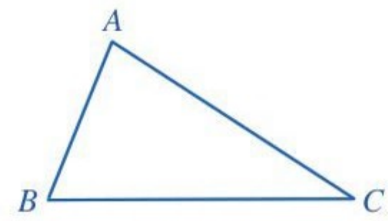
Suy ra $AB < BC$.

Do đó $\widehat{C} < \widehat{A}$ hay $\widehat{A} > \widehat{C}$.

1 Cho tam giác MNP có $MN = 4$ cm, $NP = 5$ cm, $MP = 6$ cm. Tìm góc nhỏ nhất, góc lớn nhất của tam giác MNP.

2. Cạnh đối diện với góc lớn hơn

Trong tam giác ABC (*Hình 18*), cạnh BC được gọi là *cạnh đối diện* với góc A. Tương tự, cạnh CA được gọi là cạnh đối diện với góc B, cạnh AB được gọi là cạnh đối diện với góc C.

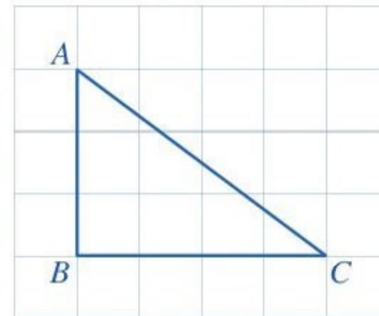


Hình 18

2 Quan sát tam giác ABC ở *Hình 19*.

a) So sánh hai góc B và C.

b) So sánh cạnh AB (đối diện với góc C) và cạnh AC (đối diện với góc B).



Hình 19

> Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong tam giác ABC, nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $AC > AB$ (*Hình 18*).

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 42^\circ$. So sánh AB và AC.

Giải

Ta có: $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 42^\circ$ (giả thiết).

Suy ra $\widehat{B} > \widehat{C}$.

Do đó $AC > AB$ hay $AB < AC$.

Nhận xét

- Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất.
- Trong tam giác tù, cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

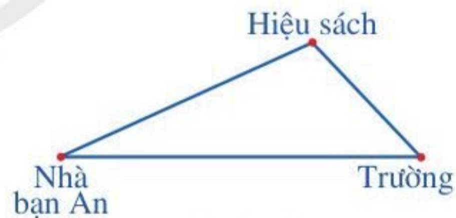
2

a) Cho tam giác DEG có góc E là góc tù. So sánh DE và DG.

b) Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 56^\circ$, $\widehat{N} = 65^\circ$. Tìm cạnh nhỏ nhất, cạnh lớn nhất của tam giác MNP.

II. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

3 Bạn An có hai con đường đi từ nhà đến trường. Đường đi thứ nhất là đường đi thẳng từ nhà đến trường, đường đi thứ hai là đường đi thẳng từ nhà đến hiệu sách rồi đi thẳng từ hiệu sách đến trường (*Hình 20*). Theo em, bạn An đi từ nhà đến trường theo đường nào sẽ gần hơn?

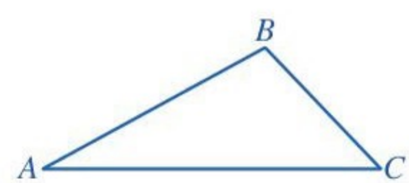


Hình 20

4 Bạn Thảo cho rằng tam giác ABC trong *Hình 21* có $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 4$ cm.

a) Hãy sử dụng thước thẳng (có chia đơn vị) để kiểm tra lại các số đo độ dài ba cạnh của tam giác ABC mà bạn Thảo đã nói.

b) So sánh $AB + BC$ và AC.



Hình 21

Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Trong tam giác ABC, ta có: $AB + BC > AC$, $AB + AC > BC$, $AC + BC > AB$. Các bất đẳng thức này gọi là các bất đẳng thức tam giác.

Từ các bất đẳng thức trên suy ra nhận xét sau đây.

Nhận xét: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Độ dài cạnh AC có thể là 16 cm được không? Vì sao?

Giải

Ta có: $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm (giả thiết);

$AC < AB + BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Suy ra: $AC < 6 + 9 = 15$ (cm).

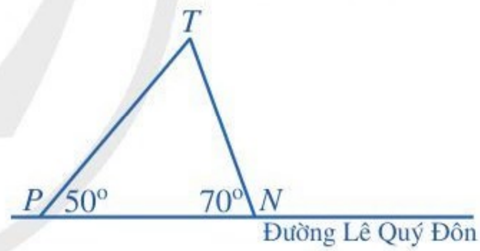
Vậy độ dài cạnh AC không thể là 16 cm.

3 Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm. So sánh hai cạnh AC và AB.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác MNP có $MN = 6$ cm, $NP = 8$ cm, $PM = 7$ cm. Tìm góc nhỏ nhất, góc lớn nhất của tam giác MNP.

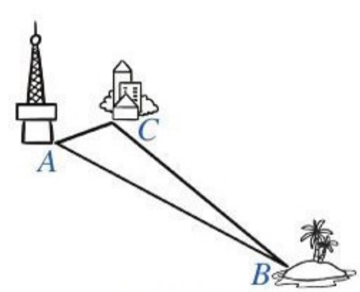
2. Bạn Hoa đi học từ nhà đến trường bằng cách đi xe buýt dọc theo đường Lê Quý Đôn và xuống xe tại một trong hai điểm dừng N hoặc P, rồi từ đó đi bộ đến trường T (*Hình 22*). Bạn Hoa nên xuống ở điểm dừng nào để quãng đường đi bộ đến trường ngắn hơn?



Hình 22

3. Theo *https://vietnamnet.vn* ngày 01/10/2020, sóng 4G có thể phủ đến bán kính 100 km.

Người ta đặt một trạm phát sóng 4G tại vị trí A. Có một đảo nhỏ (tại vị trí B) chưa biết khoảng cách đến vị trí A nhưng lại biết khoảng cách từ đảo đó đến một khách sạn (tại vị trí C) là 75 km và khách sạn đó cách vị trí A là 20 km (*Hình 23*). Sóng 4G của trạm phát sóng tại vị trí A có thể phủ đến đảo đó được không? Vì sao?

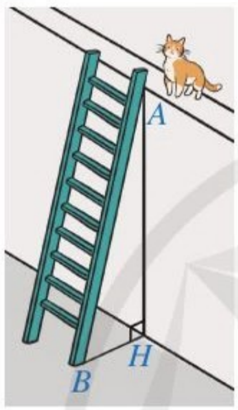


Hình 23

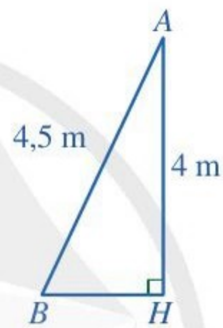
4. Bộ ba số đo độ dài nào trong mỗi trường hợp sau không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác?

a) 8 cm, 5 cm, 3 cm; b) 8 cm, 5 cm, 4 cm; c) 8 cm, 5 cm, 2 cm.

5. Con mèo của bạn Huê bị mắc kẹt trên gờ tường cao 4 m. Bác bảo vệ sử dụng một cái thang để đưa mèo xuống giúp bạn Huê. Bác đặt thang dựa vào gờ tường (*Hình 24a*), khoảng cách từ chân thang đến điểm chạm vào gờ tường là $AB = 4,5$ m. *Hình 24b* mô tả hình ảnh chiếc thang dựa vào tường trong *Hình 24a*. Bạn Huê khẳng định chân thang cách chân tường là $BH = 0,5$ m. Khẳng định của bạn Huê có đúng không? Vì sao?



a)



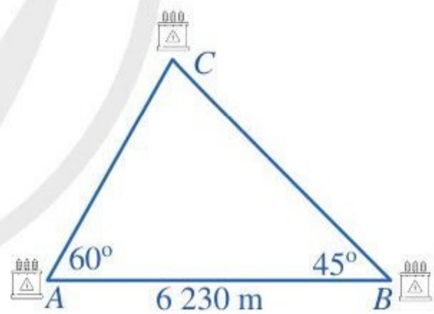
b)

Hình 24

6. Người ta cần làm đường dây điện từ một trong hai trạm biến áp *A*, *B* đến trạm biến áp *C* trên đảo (*Hình 25*).

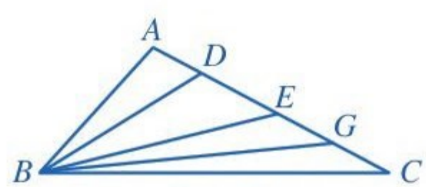
a) Đường dây điện xuất phát từ trạm biến áp nào đến trạm biến áp *C* sẽ ngắn hơn?

b) Bạn Bình ước lượng: Nếu làm cả hai đường dây điện từ *A* và từ *B* đến *C* thì tổng độ dài đường dây khoảng 6 200 m. Bạn Bình ước lượng có đúng không?



Hình 25

7. Cho tam giác *ABC* có góc *A* tù. Trên cạnh *AC* lần lượt lấy các điểm *D*, *E*, *G* sao cho *D* nằm giữa *A* và *E*; *E* nằm giữa *D* và *G*; *G* nằm giữa *E* và *C* (*Hình 26*). Sắp xếp các đoạn thẳng *BA*, *BD*, *BE*, *BG*, *BC* theo thứ tự độ dài tăng dần. Giải thích vì sao.



Hình 26

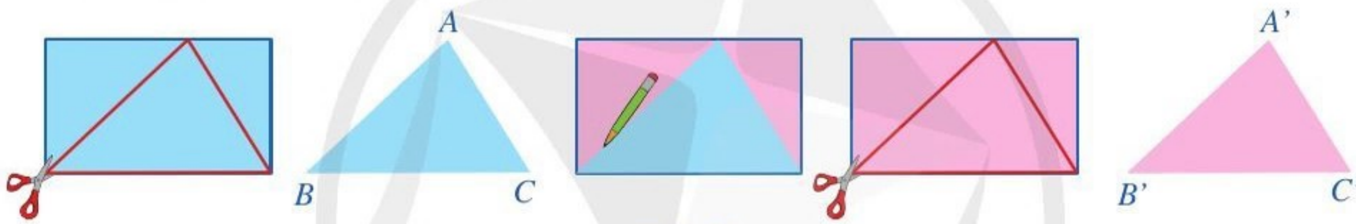
§3. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Một dây chuyền sản xuất ra các sản phẩm có dạng hình tam giác giống hệt nhau (*Hình 27*). Khi đóng gói hàng, người ta xếp chúng chồng khít lên nhau.

Hình 27

Khi hai tam giác có thể chồng khít lên nhau thì các cạnh và các góc tương ứng liên hệ với nhau như thế nào?

1 Dùng kéo cắt tờ giấy thứ nhất thành hình tam giác *ABC*. Đặt hình tam giác *ABC* lên tờ giấy thứ hai, vẽ theo các cạnh của hình tam giác *ABC* trên tờ giấy thứ hai rồi cắt thành hình tam giác *A'B'C'* (*Hình 28*).



Hình 28

Sau khi đặt tam giác *ABC* chồng khít lên tam giác *A'B'C'*, hãy so sánh:

a) Các cạnh tương ứng: *AB* và *A'B'*; *BC* và *B'C'*; *CA* và *C'A'*;

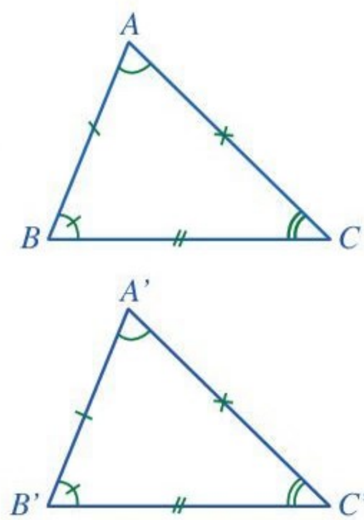
b) Các góc tương ứng: $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$; $\widehat{B}$ và $\widehat{B'}$; $\widehat{C}$ và $\widehat{C'}$.

> Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

Ở *Hoạt động 1*, hai tam giác *ABC* và *A'B'C'* bằng nhau vì chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

Khi hai tam giác *ABC* và *A'B'C'* bằng nhau thì ta kí hiệu là: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (*Hình 29*).

Quy ước: Khi viết hai tam giác bằng nhau, tên đỉnh của hai tam giác đó phải viết theo đúng thứ tự tương ứng với sự bằng nhau.



Hình 29

Chú ý

- Nếu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ và $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
- Nếu $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ thì $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ và $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

2 Quan sát hai tam giác ABC và $A'B'C'$ trên một tờ giấy kẻ ô vuông (*Hình 30*).

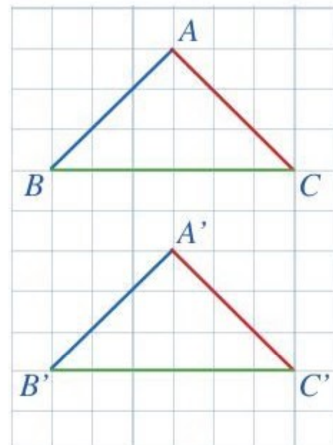
a) So sánh:

– Các cặp cạnh: AB và $A'B'$; BC và $B'C'$; CA và $C'A'$.

– Các cặp góc: A và A'; B và B'; C và C'.

b) Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có bằng nhau hay không?

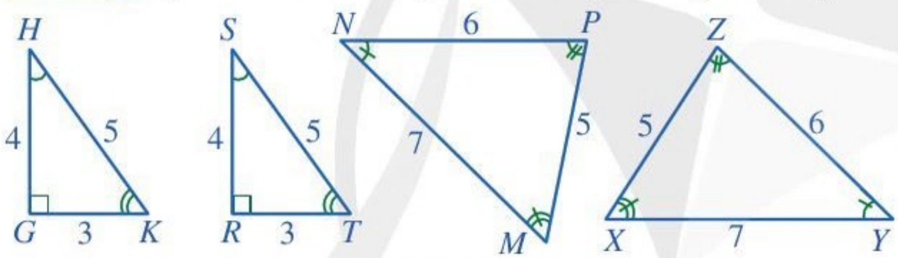
c) Cắt mảnh giấy hình tam giác ABC và mảnh giấy hình tam giác $A'B'C'$, hai hình tam giác đó có thể đặt chồng khít lên nhau hay không?



Hình 30

Ở *Hoạt động 2c*, ta có thể đặt mảnh giấy hình tam giác ABC chồng khít lên mảnh giấy hình tam giác $A'B'C'$.

Ví dụ Quan sát *Hình 31*, viết các cặp tam giác bằng nhau:



Hình 31

Cho biết $\Delta ABC = \Delta MNP$, $AC = 4$ cm, $\widehat{MPN} = 45^{\circ}$.

Tính độ dài cạnh MP và số đo góc ACB.

Giải. Dựa vào các cặp cạnh và các cặp góc tương ứng bằng nhau, ta có: $\Delta GHK = \Delta RST$; $\Delta MNP = \Delta XYZ$.

BÀI TẬP

1. Cho biết $\Delta ABC = \Delta DEG$, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 6$ cm. Tìm độ dài các cạnh của tam giác DEG.

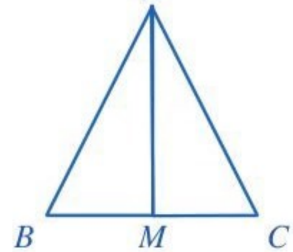
2. Cho biết $\Delta PQR = \Delta IHK$, $\widehat{P} = 71^{\circ}$, $\widehat{Q} = 49^{\circ}$. Tính số đo góc K của tam giác IHK.

3. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ và $\widehat{A} + \widehat{N} = 125^{\circ}$. Tính số đo góc P.

4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC thoả mãn $\Delta AMB = \Delta AMC$ (*Hình 32*). Chứng minh rằng:

a) M là trung điểm của đoạn thẳng BC;

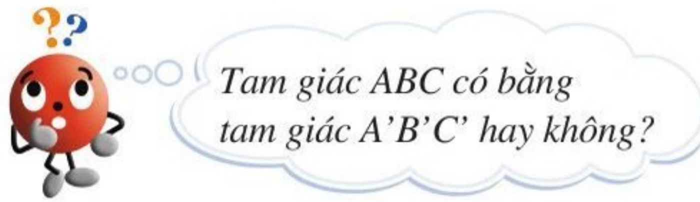
b) Tia AM là tia phân giác của góc BAC và $AM \perp BC$.



Hình 32

§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC: CẠNH - CẠNH - CẠNH

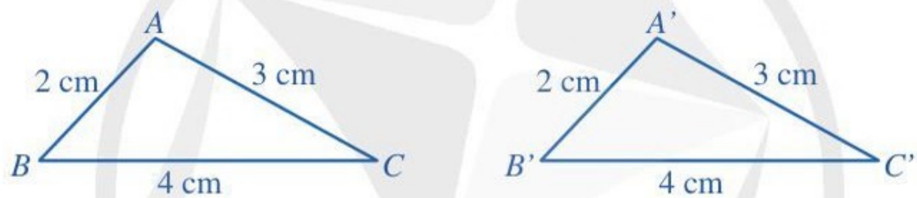
Giá để đồ ở *Hình 33* gợi nên hình ảnh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.



Hình 33

I. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH (c.c.c)

1 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ (*Hình 34*) có: $AB = A'B' = 2$ cm, $AC = A'C' = 3$ cm, $BC = B'C' = 4$ cm. Hãy sử dụng thước đo góc để kiểm nghiệm rằng: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

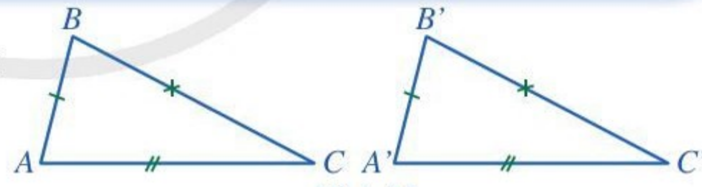


Hình 34

Ta thừa nhận tính chất sau:

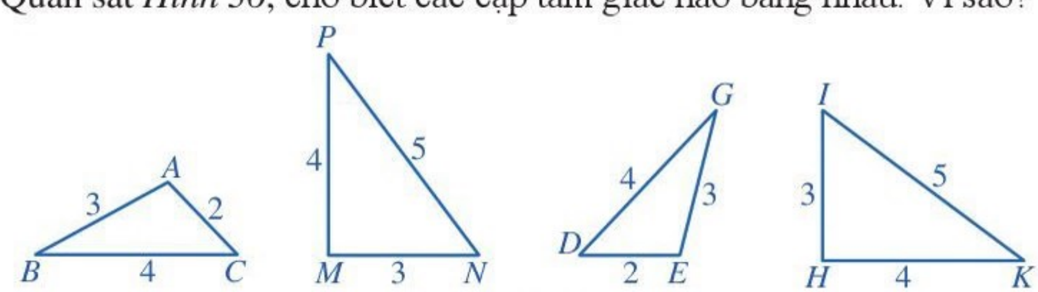
> Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c) (*Hình 35*).



Hình 35

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 36*, cho biết các cặp tam giác nào bằng nhau. Vì sao?



Hình 36

Giải

• Xét hai tam giác ABC và EGD, ta có:

$AB = EG$; $BC = GD$; $CA = DE$.

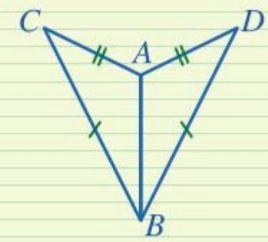
Suy ra $\triangle ABC = \triangle EGD$ (c.c.c).

• Xét hai tam giác MNP và HIK, ta có:

$MN = HI$; $NP = IK$; $PM = KH$.

Suy ra $\triangle MNP = \triangle HIK$ (c.c.c).

Hai tam giác ở *Hình 37* có bằng nhau không? Vì sao?



Hình 37

Ví dụ 2 Cho góc xOy.

a) Dùng thước thẳng (có chia đơn vị) và compa vẽ hình theo các bước sau:

– Vẽ một phần đường tròn tâm O bán kính 2 cm cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B;

– Vẽ một phần đường tròn tâm A bán kính 3 cm;

– Vẽ một phần đường tròn tâm B bán kính 3 cm cắt phần đường tròn tâm A bán kính 3 cm tại C nằm trong góc xOy;

– Vẽ tia Oz đi qua điểm C.

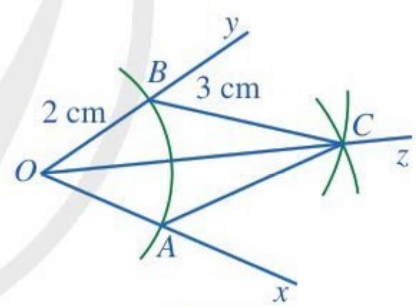
b) Chứng minh:

– $\triangle OAC = \triangle OBC$;

– Tia Oz là tia phân giác của góc xOy.

Giải

a) Xem *Hình 38*.



Hình 38

b) A, B cùng nằm trên đường tròn tâm O bán kính 2 cm nên $OA = OB$ (cùng bằng 2 cm).

C nằm trên đường tròn tâm A bán kính 3 cm nên $AC = 3$ cm.

C nằm trên đường tròn tâm B bán kính 3 cm nên $BC = 3$ cm.

Do đó $AC = BC$ (cùng bằng 3 cm).

– Xét hai tam giác OAC và OBC, ta có:

$OA = OB$; $AC = BC$; OC là cạnh chung.

Suy ra $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c.c.c).

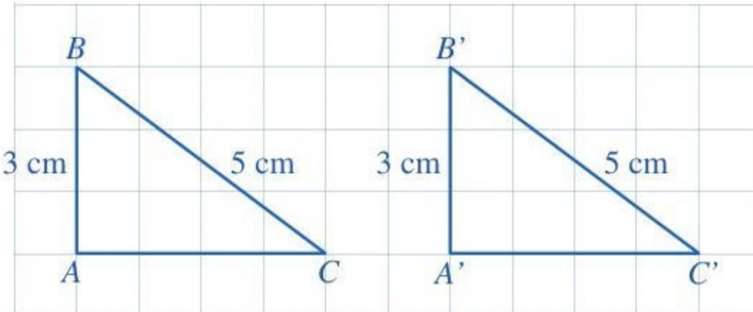
– Vì $\triangle OAC = \triangle OBC$ nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$ (hai góc tương ứng), tức là $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$.

Vậy tia Oz là tia phân giác của góc xOy.

Nhận xét: Cách vẽ tia phân giác của một góc đã được chứng minh cụ thể như trên.

II. ÁP DỤNG VÀO TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU VỀ CẠNH HUYỀN VÀ CẠNH GÓC VUÔNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

2 Cho hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ có: $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$, $AB = A'B' = 3$ cm, $BC = B'C' = 5$ cm (*Hình 39*). So sánh độ dài các cạnh AC và $A'C'$.

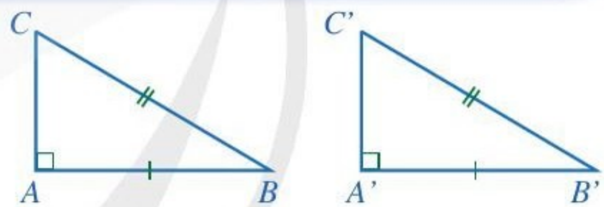


Hình 39

Người ta chứng minh được: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì cạnh góc vuông còn lại của hai tam giác bằng nhau. Vì thế, từ trường hợp bằng nhau thứ nhất (cạnh - cạnh - cạnh) của tam giác, ta có trường hợp bằng nhau đối với tam giác vuông như sau:

> Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$, $BC = B'C'$, $AB = A'B'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) (*Hình 40*).

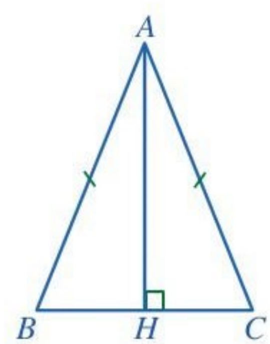


Hình 40

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $AB = AC$, AH vuông góc với BC (*Hình 41*). Chứng minh rằng:

a) $\Delta AHB = \Delta AHC$;

b) AH là tia phân giác của góc BAC.



Hình 41

Giải

a) Do $AH \perp BC$ nên $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^o$.

Xét hai tam giác vuông AHB và AHC, ta có:

$AB = AC$ (giả thiết); AH là cạnh chung.

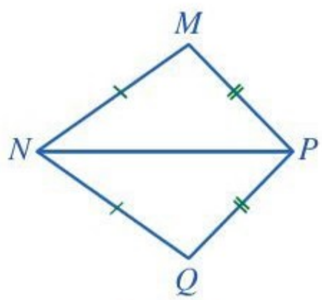
Suy ra $\Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

b) Vì $\Delta AHB = \Delta AHC$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ (hai góc tương ứng).

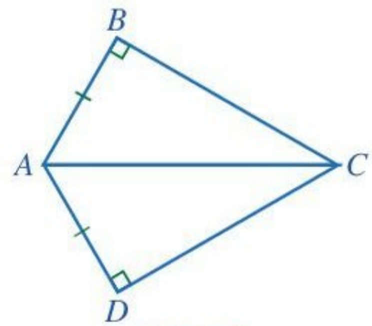
Suy ra AH là tia phân giác của góc BAC.

BÀI TẬP

1. Cho *Hình 42* có $MN = QN$, $MP = QP$. Chứng minh $\widehat{MNP} = \widehat{QNP}$.



Hình 42



Hình 43

2. Cho *Hình 43* có $AB = AD$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.
Chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$.

Hình 44

3. Cho *Hình 44* có $AC = BD$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$.
Chứng minh $AD = BC$.

4. Cho hai tam giác ABC và MNP thoả mãn: $AB = MN$, $BC = NP$, $AC = MP$, $\widehat{A} = 65^\circ$, $\widehat{N} = 71^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của hai tam giác.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

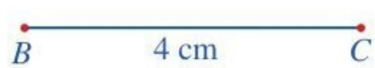
Vẽ tam giác khi biết ba cạnh

Để vẽ tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm bằng thước thẳng (có chia đơn vị) và compa, ta làm như sau:

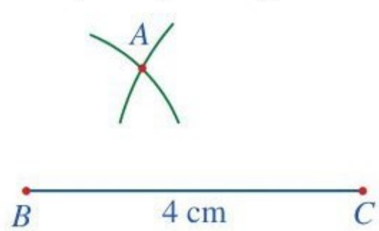
Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $BC = 4$ cm

Bước 2. Vẽ một phần đường tròn tâm B bán kính 2 cm và một phần đường tròn tâm C bán kính 3 cm, A là điểm chung của hai phần đường tròn đó

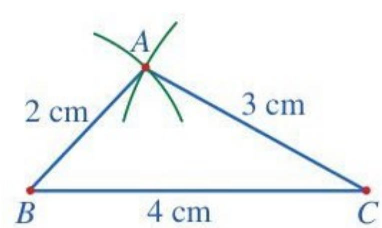
Bước 3. Vẽ các đoạn thẳng AB, AC. Ta nhận được tam giác ABC.



Bước 1



Bước 2

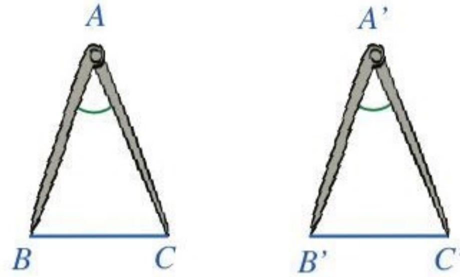


Bước 3

§5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC: CẠNH - GÓC - CẠNH

Hai chiếc compa ở *Hình 45* gợi nên hình ảnh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

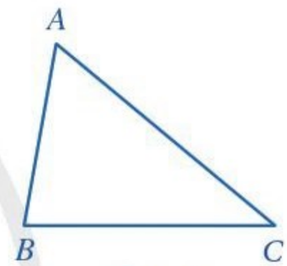
Hai tam giác ABC và A'B'C' có bằng nhau hay không?



Hình 45

I. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH (c.g.c)

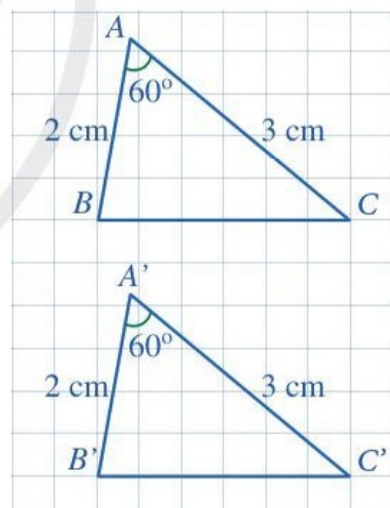
1 Cho tam giác ABC (*Hình 46*). Nêu hai cạnh của góc tại đỉnh A.



Hình 46

Trong tam giác ABC (*Hình 46*), ta gọi góc A là góc xen giữa hai cạnh AB và AC. Tương tự, góc B là góc xen giữa hai cạnh BA và BC, góc C là góc xen giữa hai cạnh CA và CB.

2 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ (*Hình 47*) có: $AB = A'B' = 2$ cm, $\widehat{A} = \widehat{A'} = 60^\circ$, $AC = A'C' = 3$ cm. Bằng cách đếm số ô vuông, hãy so sánh BC và $B'C'$. Từ đó có thể kết luận được hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau hay không?

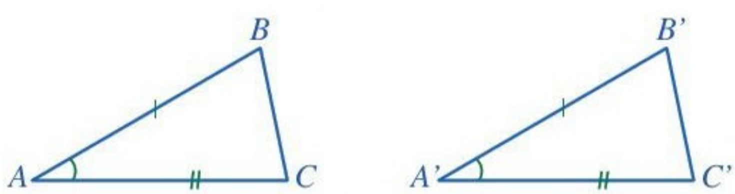


Hình 47

Ta thừa nhận tính chất sau:

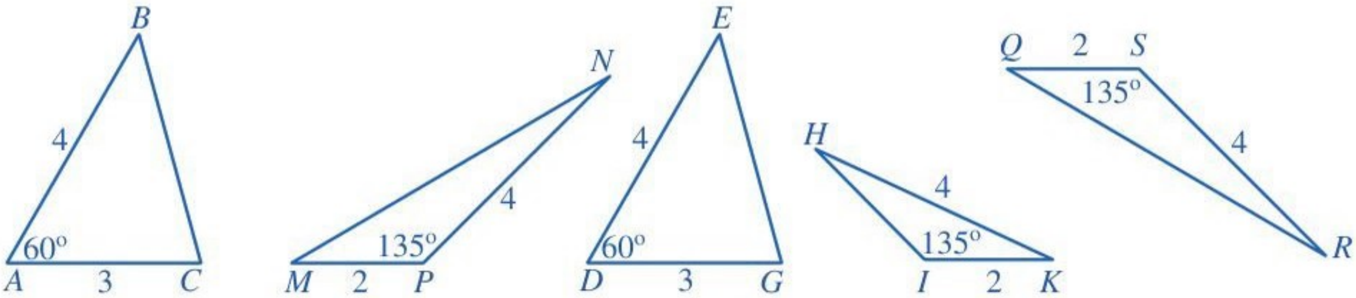
> Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này lần lượt bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AC = A'C'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c) (*Hình 48*).



Hình 48

Ví dụ 1 Các cặp tam giác nào ở *Hình 49* là bằng nhau? Vì sao?



Hình 49

Giải

• Xét hai tam giác ABC và DEG, ta có:

$AB = DE$; $\widehat{A} = \widehat{D}$; $AC = DG$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta DEG$ (c.g.c).

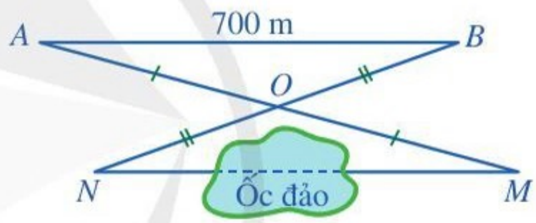
• Xét hai tam giác MNP và QRS, ta có:

$MP = QS$; $\widehat{P} = \widehat{S}$; $NP = RS$.

Suy ra $\Delta MNP = \Delta QRS$ (c.g.c).

1 Cho góc nhọn xOy. Hai điểm M, N thuộc tia Ox thoả mãn $OM = 2$ cm, $ON = 3$ cm. Hai điểm P, Q thuộc tia Oy thoả mãn $OP = 2$ cm, $OQ = 3$ cm. Chứng minh $MQ = NP$.

Ví dụ 2 Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn các vị trí O, A, B bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN; khoảng cách AB là đo được; O là trung điểm của cả AM và BN (*Hình 50*). Người ta đo được $AB = 700$ m. Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét?



Hình 50

Giải

Xét hai tam giác OMN và OAB, ta có:

$OM = OA$ (vì O là trung điểm của AM);

$\widehat{MON} = \widehat{AOB}$ (hai góc đối đỉnh);

$ON = OB$ (vì O là trung điểm của BN).

Suy ra $\Delta OMN = \Delta OAB$ (c.g.c).

Do đó $MN = AB$ (hai cạnh tương ứng), mà $AB = 700$ m nên $MN = 700$ m.

2 Cho góc xOy có Oz là tia phân giác. Hai điểm M, N lần lượt thuộc Ox, Oy và khác O thoả mãn $OM = ON$, điểm P khác O và thuộc Oz. Chứng minh $MP = NP$.

II. ÁP DỤNG VÀO TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU VỀ HAI CẠNH GÓC VUÔNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Từ trường hợp bằng nhau thứ hai (cạnh - góc - cạnh) của tam giác, ta có trường hợp bằng nhau đối với tam giác vuông như sau:

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

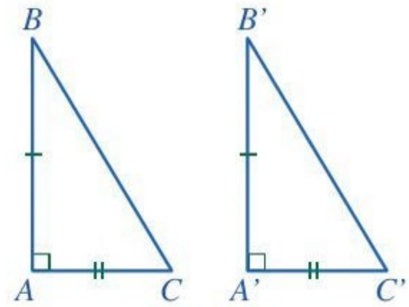
Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$(*Hình 51*).

Chứng minh

Xét hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$, ta có:

$AB = A'B'$; $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (cùng bằng 90^o); $AC = A'C'$.

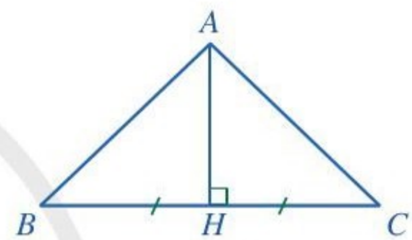
Suy ra $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c).



Hình 51

Ví dụ 3 Hai tam giác AHB và AHC vuông tại H có $HB = HC$ (*Hình 52*). Chứng minh:

a) $\Delta AHB = \Delta AHC$; b) $AB = AC$.



Hình 52

Giải

a) Xét hai tam giác vuông AHB và AHC, ta có:

AH là cạnh chung; $HB = HC$ (giả thiết).

Suy ra $\Delta AHB = \Delta AHC$ (hai cạnh góc vuông).

b) Vì $\Delta AHB = \Delta AHC$ nên $AB = AC$ (hai cạnh tương ứng).

BÀI TẬP

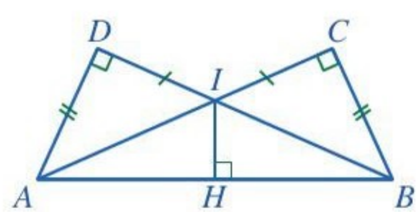
1. Chứng minh định lí: "Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn" (trang 74) thông qua việc giải bài tập sau đây:

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại điểm D. Điểm E thuộc cạnh AC thoả mãn $AE = AB$. Chứng minh:

a) $\Delta ABD = \Delta AED$; b) $\widehat{B} > \widehat{C}$.

2. Cho *Hình 53* có $AD = BC$, $IC = ID$, các góc tại đỉnh C, D, H là góc vuông. Chứng minh:

a) $IA = IB$; b) IH là tia phân giác của góc AIB.

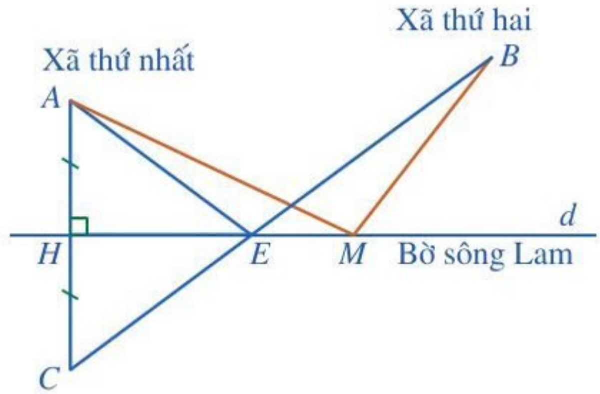


Hình 53

3. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Các kĩ sư muốn bắc một cây cầu qua sông Lam cho người dân hai xã. Để thuận lợi cho người dân đi lại, các kĩ sư cần phải chọn vị trí của cây cầu sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến chân cầu là nhỏ nhất. Bạn Nam đề xuất cách xác định vị trí của cây cầu như sau (*Hình 54*):

Sông Lam

(Ảnh: Lương Hồng Văn)



Hình 54

– Kí hiệu điểm A chỉ vị trí xã thứ nhất, điểm B chỉ vị trí xã thứ hai, đường thẳng d chỉ vị trí bờ sông Lam.

– Kẻ AH vuông góc với d (H thuộc d), kéo dài AH về phía H và lấy điểm C sao cho $AH = HC$.

– Nối C với B, CB cắt đường thẳng d tại điểm E.

Khi đó, E là vị trí của cây cầu.

Bạn Nam nói rằng: Lấy một điểm M trên đường thẳng d, M khác E thì

$$MA + MB > EA + EB.$$

Em hãy cho biết bạn Nam nói đúng hay sai. Vì sao?

4. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và CA; Q, R lần lượt là trung điểm của NP và PM. Chứng minh:

a) $AD = MQ$;

b) $DE = QR$.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

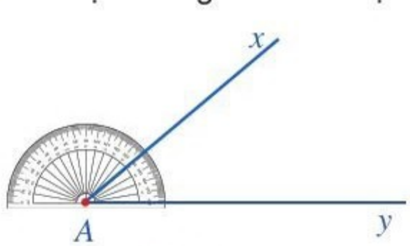
Vẽ tam giác khi biết hai cạnh và góc xen giữa

Để vẽ tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ bằng thước thẳng (có chia đơn vị) và thước đo góc, ta làm như sau:

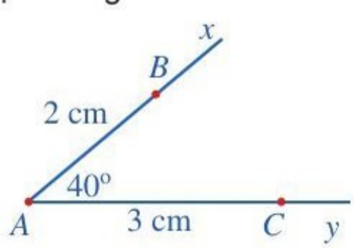
Bước 1. Vẽ $\widehat{xAy} = 40^\circ$

Bước 2. Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 2$ cm, trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 3$ cm

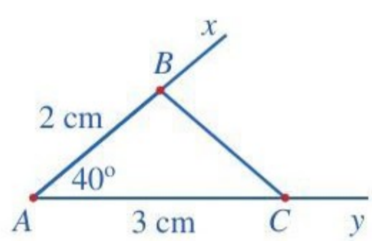
Bước 3. Vẽ đoạn thẳng BC. Ta nhận được tam giác ABC.



Bước 1



Bước 2



Bước 3

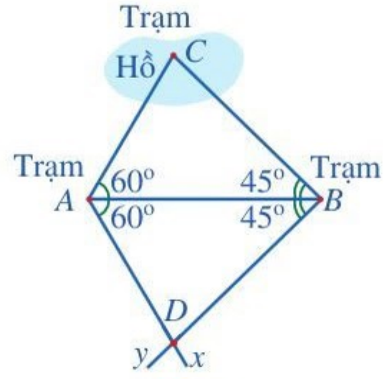
§6. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC: GÓC - CẠNH - GÓC

Có hai trạm quan sát A, B và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Do không thể đo trực tiếp được khoảng cách từ A và từ B đến C nên người ta làm như sau (*Hình 55*):

– Đo góc BAC được 60^o, đo góc ABC được 45^o;

– Kẻ tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = 60^o$, kẻ tia By sao cho $\widehat{ABy} = 45^o$, xác định giao điểm D của hai tia đó;

– Đo khoảng cách AD và BD.

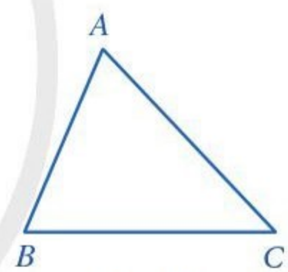


Hình 55

Tại sao lại có $AC = AD$ và $BC = BD$?

I. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC - CẠNH - GÓC (g.c.g)

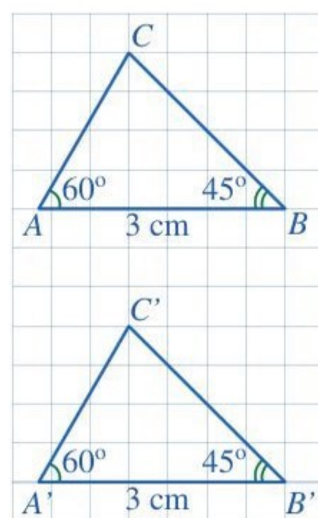
1 Cho tam giác ABC (*Hình 56*). Những góc nào của tam giác ABC có cạnh thuộc đường thẳng AB?



Hình 56

Trong tam giác ABC (*Hình 56*), góc A và góc B là hai góc kề cạnh AB. Tương tự, góc B và góc C là hai góc kề cạnh BC; góc C và góc A là hai góc kề cạnh CA.

2 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ (*Hình 57*) có: $\widehat{A} = \widehat{A'} = 60^o$, $AB = A'B' = 3$ cm, $\widehat{B} = \widehat{B'} = 45^o$. Bằng cách đếm số ô vuông, hãy so sánh BC và $B'C'$. Từ đó có thể kết luận được hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau hay không?

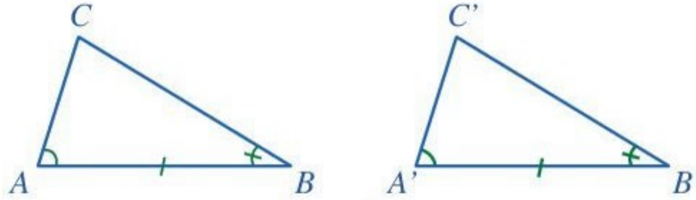


Hình 57

Ta thừa nhận tính chất sau:

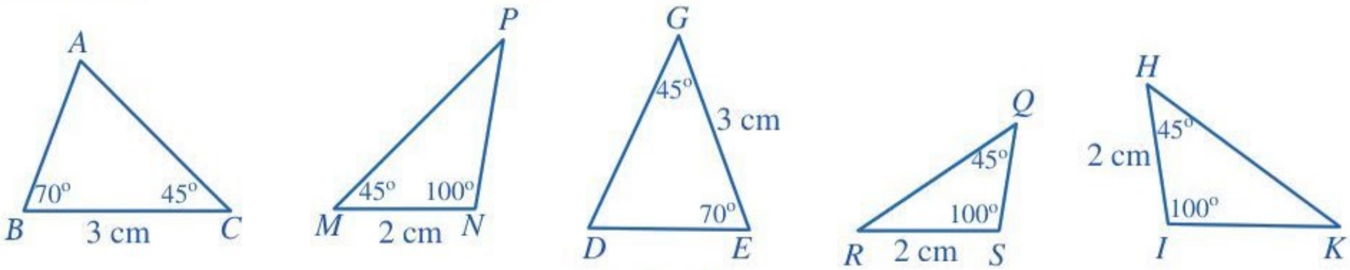
> **Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.**

Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g) (*Hình 58*).



Hình 58

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 59*, các cặp tam giác nào dưới đây là bằng nhau? Vì sao?



Hình 59

Giải

• Xét hai tam giác ABC và DEG, ta có:

$\widehat{B} = \widehat{E}$; $BC = EG$; $\widehat{C} = \widehat{G}$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta DEG$ (g.c.g).

• Xét hai tam giác MNP và HIK, ta có:

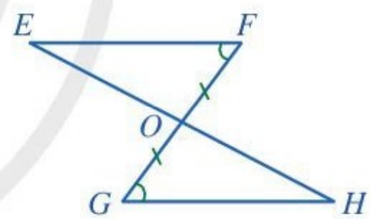
$\widehat{M} = \widehat{H}$; $MN = HI$; $\widehat{N} = \widehat{I}$.

Suy ra $\Delta MNP = \Delta HIK$ (g.c.g).

1 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thoả mãn: $BC = B'C' = 3$ cm, $\widehat{B} = \widehat{B'} = 60°$, $\widehat{C} = 50°$, $\widehat{A'} = 70°$. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có bằng nhau không? Vì sao?

Ví dụ 2 Cho *Hình 60* có $OF = OG$, $\widehat{F} = \widehat{G}$.

Chứng minh: $OE = OH$, $EF = HG$.



Hình 60

Giải

Xét hai tam giác OEF và OHG, ta có:

$\widehat{F} = \widehat{G}$ (giả thiết);

$OF = OG$ (giả thiết);

$\widehat{EOF} = \widehat{HOG}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\Delta OEF = \Delta OHG$ (g.c.g).

Do đó $OE = OH$ và $EF = HG$ (hai cạnh tương ứng).

2 Giải thích bài toán ở phần mở đầu.

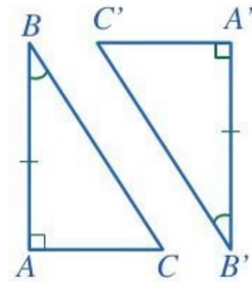
II. ÁP DỤNG VÀO TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU VỀ CẠNH GÓC VUÔNG (HOẶC CẠNH HUYỀN) VÀ GÓC NHỌN CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Từ trường hợp bằng nhau thứ ba (góc - cạnh - góc) của tam giác, ta có các trường hợp bằng nhau đối với tam giác vuông như sau:

Trường hợp bằng nhau về cạnh góc vuông và góc nhọn của tam giác vuông

Nếu một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$ $AB = A'B', \widehat{B} = \widehat{B'}$
KL	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$



Hình 61

Chứng minh: (*Hình 61*)

Xét hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$, ta có:

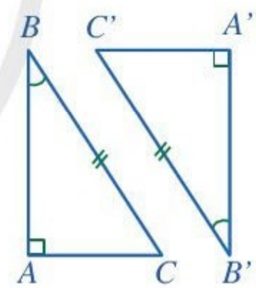
$\widehat{A} = \widehat{A'}$ (cùng bằng 90^o); $AB = A'B'$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g).

Trường hợp bằng nhau về cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^o$ $BC = B'C', \widehat{B} = \widehat{B'}$
KL	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$



Hình 62

Chứng minh: (*Hình 62*)

Xét hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$, ta có:

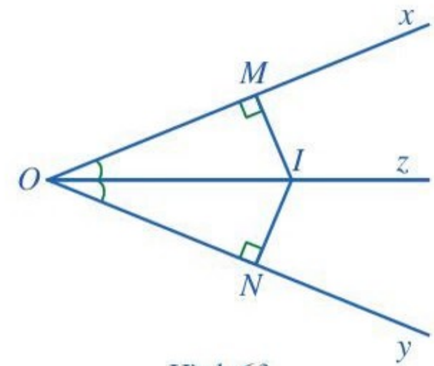
$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{B'} + \widehat{C'} = 90^o$.

Mà $\widehat{B} = \widehat{B'}$ suy ra $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Vì $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $BC = B'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ nên $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$(g.c.g).

Ví dụ 3 Cho góc xOy và Oz là tia phân giác của góc đó. Gọi I là một điểm trên tia Oz (I khác O). Kẻ IM vuông góc với Ox ($M \in Ox$), IN vuông góc với Oy ($N \in Oy$). Chứng minh rằng $IM = IN$.

Giải. (*Hình 63*)



Hình 63

Xét hai tam giác vuông IOM và ION, ta có:

OI là cạnh chung;

$\widehat{IOM} = \widehat{ION}$ (vì Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$).

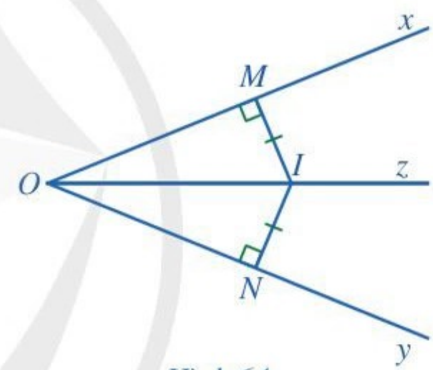
Suy ra $\Delta IOM = \Delta ION$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Vậy $IM = IN$ (hai cạnh tương ứng).

Nhận xét: Độ dài các đoạn thẳng IM, IN gọi là khoảng cách từ điểm I lần lượt đến hai cạnh Ox, Oy của góc xOy. Như vậy, ta có thể nói: Nếu một điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Ví dụ 4 Cho góc xOy và Oz là tia phân giác của góc đó. Gọi I là một điểm nằm trong góc xOy. Kẻ IM vuông góc với Ox ($M \in Ox$), IN vuông góc với Oy ($N \in Oy$). Giả sử $IM = IN$. Chứng minh rằng điểm I nằm trên tia phân giác Oz của góc xOy.

Giải. (*Hình 64*)



Hình 64

Xét hai tam giác vuông IOM và ION, ta có:

OI là cạnh chung; $IM = IN$ (giả thiết).

Suy ra $\Delta IOM = \Delta ION$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Do đó $\widehat{IOM} = \widehat{ION}$ (hai góc tương ứng).

Vậy điểm I thuộc tia phân giác Oz của góc xOy.

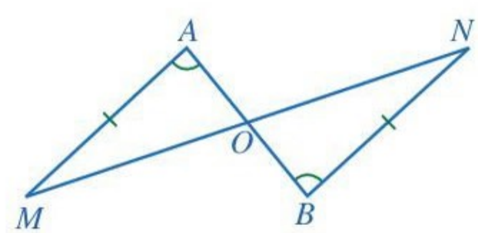
Nhận xét: Nếu một điểm nằm trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

BÀI TẬP

1. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thoả mãn: $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có bằng nhau không? Vì sao?

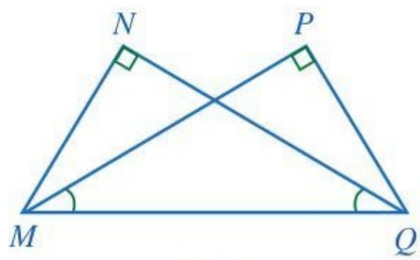
2. Cho *Hình 65* có $AM = BN$, $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Chứng minh: $OA = OB$, $OM = ON$.

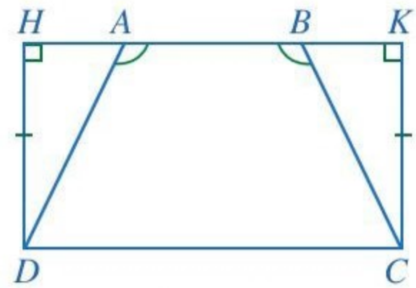


Hình 65

3. Cho *Hình 66* có $\widehat{N} = \widehat{P} = 90^o$, $\widehat{PMQ} = \widehat{NQM}$. Chứng minh: $MN = QP$, $MP = QN$.



Hình 66



Hình 67

4. Cho *Hình 67* có $\widehat{AHD} = \widehat{BKC} = 90^o$, $DH = CK$, $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. Chứng minh $AD = BC$.

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Tia phân giác góc BAC cắt cạnh BC tại điểm D.

a) Chứng minh $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

b) Kẻ tia Dx nằm trong góc ADC sao cho $\widehat{ADx} = \widehat{ADB}$. Giả sử tia Dx cắt cạnh AC tại điểm E. Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta AED$, $AB < AC$.

6. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Tia phân giác của góc BAC và NMP lần lượt cắt các cạnh BC và NP tại D, Q. Chứng minh $AD = MQ$.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

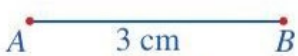
Vẽ tam giác khi biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó

Để vẽ tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $\widehat{A} = 60^o$, $\widehat{B} = 45^o$ bằng thước thẳng (có chia đơn vị) và thước đo góc, ta làm như sau:

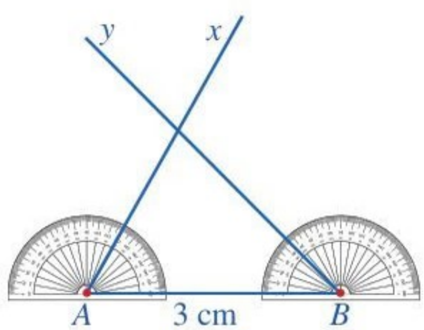
Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $AB = 3$ cm

Bước 2. Vẽ các tia Ax, By sao cho $\widehat{BAx} = 60^o$, $\widehat{ABy} = 45^o$

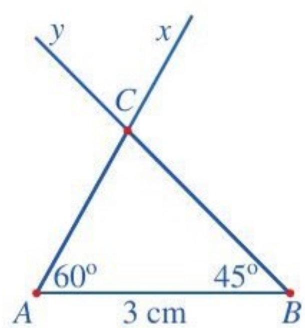
Bước 3. Vẽ C là điểm chung của hai tia Ax và By. Ta nhận được tam giác ABC.



Bước 1



Bước 2



Bước 3

§7. TAM GIÁC CÂN

Cầu Long Biên

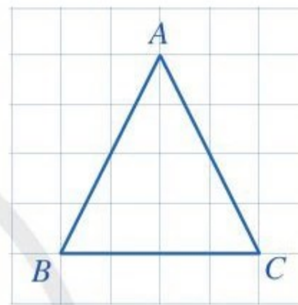
(Nguồn: https://www.shutterstock.com)

Cầu Long Biên bắc qua sông Hồng ở Thủ đô Hà Nội gợi nên hình ảnh tam giác *ABC* có sự đối xứng và cân bằng.

Tam giác ABC như vậy gọi là tam giác gì?

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Trong *Hình 68*, hai cạnh *AB* và *AC* của tam giác *ABC* có bằng nhau hay không?

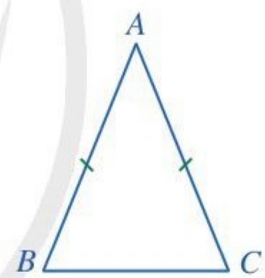


Hình 68

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Cho tam giác cân *ABC* có $AB = AC$ (*Hình 69*). Khi đó, ta gọi:

- Tam giác *ABC* là tam giác cân tại *A*;
- *AB*, *AC* là các cạnh bên và *BC* là cạnh đáy;
- $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ là các góc ở đáy và $\widehat{A}$ là góc ở đỉnh.



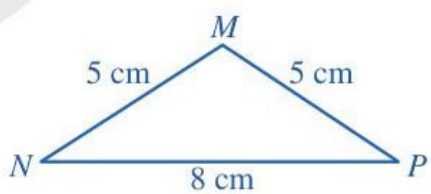
Hình 69

Ví dụ 1

a) Quan sát *Hình 70*, cho biết tam giác *MNP* có phải là tam giác cân không. Vì sao?

b) Cho tam giác *DEG* cân tại *E* có $ED = 4$ cm (*Hình 71*). Tính độ dài cạnh *EG*.

c) Trong tam giác cân *DEG* (*Hình 71*), hãy nêu các cạnh bên, cạnh đáy, góc ở đáy, góc ở đỉnh của tam giác cân đó.



Hình 70

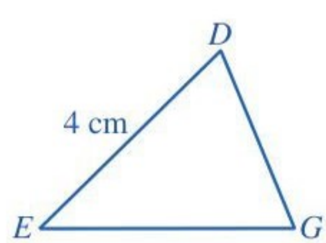
Giải

a) Vì $MN = MP$ (cùng bằng 5 cm) nên tam giác *MNP* là tam giác cân tại *M*.

b) Do tam giác *DEG* cân tại *E* nên $EG = ED$.

Mà $ED = 4$ cm, suy ra $EG = 4$ cm.

c) Tam giác cân *DEG* có: các cạnh bên là *ED* và *EG*; cạnh đáy là *DG*; các góc ở đáy là $\widehat{D}$, $\widehat{G}$; góc ở đỉnh là $\widehat{E}$.



Hình 71

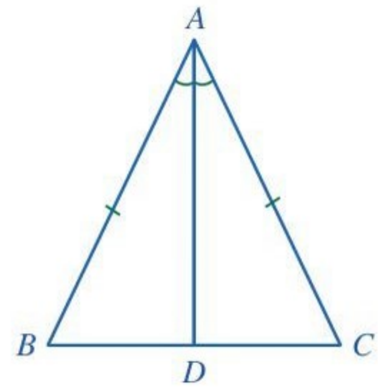
II. TÍNH CHẤT

2

Cho tam giác ABC cân tại A, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D (*Hình 72*).

a) Hai tam giác ABD và ACD có bằng nhau hay không? Vì sao?

b) Hai góc B và C có bằng nhau hay không? Vì sao?

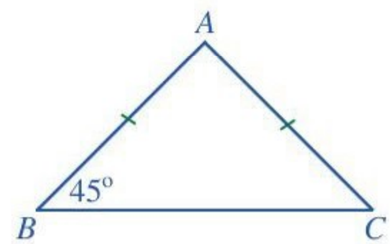


Hình 72

> Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B} = 45^\circ$ (*Hình 73*). Tính số đo các góc còn lại của tam giác.



Hình 73

Giải

Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Mà $\widehat{B} = 45^\circ$ nên $\widehat{C} = 45^\circ$.

Do $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác)

nên $\widehat{A} + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

Suy ra: $\widehat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

> - Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau được gọi là tam giác vuông cân.
> - Trong tam giác vuông cân, mỗi góc ở đáy bằng 45°.

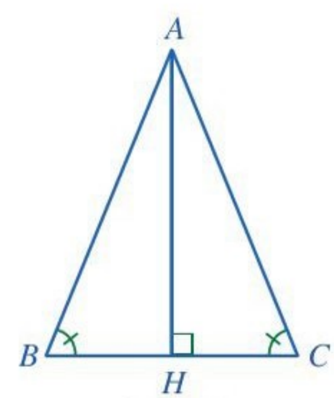
III. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

3

Cho tam giác ABC thoả mãn $\widehat{B} = \widehat{C}$. Kẻ AH vuông góc với BC, H thuộc BC (*Hình 74*).

a) Hai tam giác BAH và CAH có bằng nhau hay không? Vì sao?

b) Hai cạnh AB và AC có bằng nhau hay không? Vì sao?



Hình 74

> Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Ví dụ 3

Cho tam giác *HIK* thoả mãn: $\widehat{I} = 48^o$, $\widehat{K} = 84^o$. Chứng minh tam giác *HIK* cân.

Giải

Do $\widehat{H} + \widehat{I} + \widehat{K} = 180^o$ (tổng ba góc trong một tam giác)

nên $\widehat{H} + 48^o + 84^o = 180^o$.

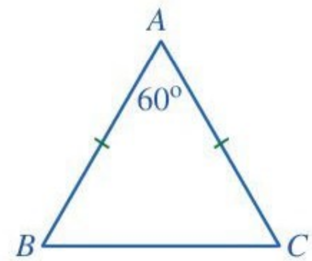
Suy ra: $\widehat{H} = 180^o - 48^o - 84^o = 48^o$.

Vì $\widehat{H} = \widehat{I}$ (cùng bằng 48^o) nên tam giác *HIK* cân.

Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Qua điểm *M* nằm giữa *A* và *B* kẻ đường thẳng song song với *BC*, cắt cạnh *AC* tại *N*. Chứng minh tam giác *AMN* cân.

Ví dụ 4

Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $\widehat{A} = 60^o$ (*Hình 75*). Chứng minh rằng tam giác *ABC* có ba cạnh bằng nhau.



Hình 75

Giải

Vì tam giác *ABC* cân tại *A* nên *AB* = *AC* và $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Trong tam giác *ABC*, ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$.

Suy ra: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^o$ hay $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^o$.

Do $\widehat{A} = 60^o$ nên $2\widehat{B} = 180^o - 60^o = 120^o$,

tức là $\widehat{B} = 120^o : 2 = 60^o$.

Tam giác *ABC* có $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^o$ nên tam giác *ABC* cân tại *C*. Suy ra *CA* = *BC*.

Vì vậy, tam giác *ABC* có *AB* = *BC* = *CA*.

- Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều.
- Tam giác cân có một góc bằng 60^o là tam giác đều.

IV. VẼ TAM GIÁC CÂN

4

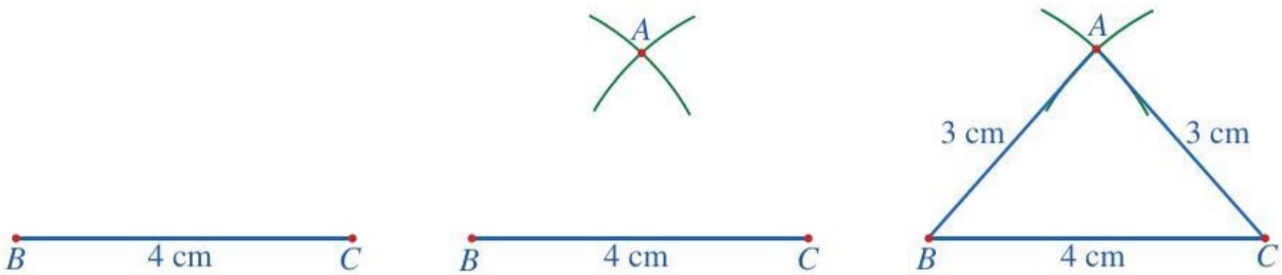
Dùng thước thẳng (có chia đơn vị) và compa vẽ tam giác cân *ABC* có cạnh đáy *BC* = 4 cm, cạnh bên *AB* = *AC* = 3 cm.

Để vẽ tam giác *ABC*, ta làm như sau:

Bước 1. Vẽ đoạn thẳng *BC* = 4 cm

Bước 2. Vẽ một phần đường tròn tâm *B* bán kính 3 cm và một phần đường tròn tâm *C* bán kính 3 cm, chúng cắt nhau tại điểm *A*

Bước 3. Vẽ các đoạn thẳng AB, AC. Ta nhận được tam giác ABC.



Bước 1 *Bước 2* *Bước 3*

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm của cạnh AC và N là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh $BM = CN$.

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^o$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D. Đường thẳng qua D song song với AB cắt cạnh AC tại E. Chứng minh rằng tam giác ADE đều.

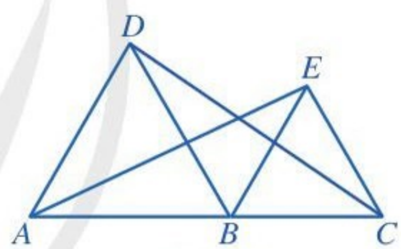
3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh huyền BC. Chứng minh tam giác MAB vuông cân.

4. Trong *Hình 76*, cho biết các tam giác ABD và BCE là các tam giác đều và A, B, C thẳng hàng. Chứng minh rằng:

a) $AD \parallel BE$ và $BD \parallel CE$;

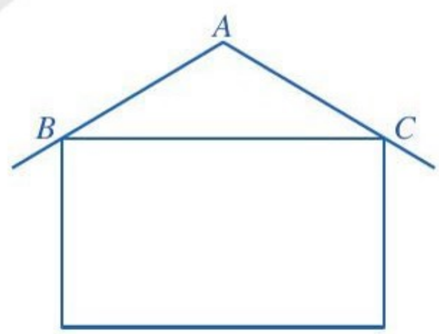
b) $\widehat{ABE} = \widehat{DBC} = 120^o$;

c) $AE = CD$.



Hình 76

5. Trong thiết kế của một ngôi nhà, độ nghiêng của mái nhà so với phương nằm ngang phải phù hợp với kết cấu của ngôi nhà và vật liệu làm mái nhà. *Hình 77* mô tả mặt cắt đứng của ngôi nhà, trong đó độ nghiêng của mái nhà so với phương nằm ngang được biểu diễn bởi số đo góc ở đáy của tam giác ABC cân tại A.



Hình 77

Tính độ nghiêng của mái nhà so với mặt phẳng nằm ngang trong mỗi trường hợp sau:

a) Góc ở đỉnh A là (khoảng) 120^o đối với mái nhà lợp bằng ngói;

b) Góc ở đỉnh A là (khoảng) 140^o đối với mái nhà lợp bằng fibro xi măng;

c) Góc ở đỉnh A là (khoảng) 148^o đối với mái nhà lợp bằng tôn.

§8. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Cầu Bãi Cháy
(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

Cầu Bãi Cháy nối Hòn Gai và Bãi Cháy (Quảng Ninh). Trụ cầu và dây cáp của cầu gợi nên hình ảnh đường vuông góc và đường xiên.

Đường vuông góc và đường xiên có tính chất như thế nào?

I. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

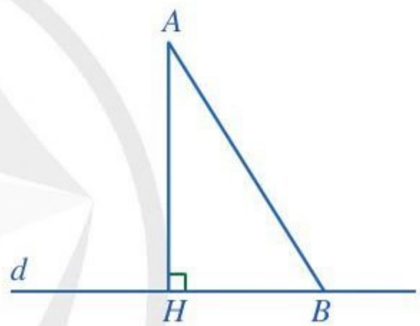
Trong *Hình 78*, ta gọi:

– Đoạn thẳng AH là *đoạn vuông góc* hay *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d;

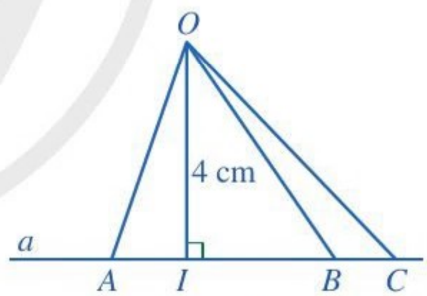
– Điểm H là *chân của đường vuông góc* hay *hình chiếu* của điểm A trên đường thẳng d;

– Độ dài đoạn thẳng AH là *khoảng cách* từ điểm A đến đường thẳng d;

– Đoạn thẳng AB là một *đường xiên* kẻ từ điểm A đến đường thẳng d.



Hình 78



Hình 79

Ví dụ 1 Quan sát *Hình 79* và cho biết:

a) Hình chiếu của điểm O trên đường thẳng a và khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a;

b) Các đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a.

Giải

a) Hình chiếu của điểm O trên đường thẳng a là điểm I. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là $OI = 4$ cm.

b) Các đoạn thẳng OA, OB, OC là các đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a.

1 Cho tam giác ABC vuông tại A.

a) Khoảng cách từ B đến đường thẳng AC bằng độ dài đoạn thẳng nào?

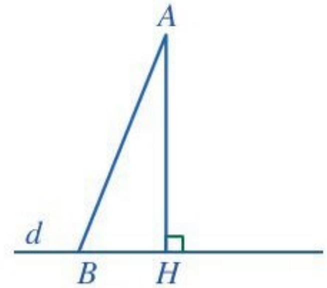
b) Đoạn thẳng nào là một đường xiên kẻ từ điểm B đến đường thẳng AC?

II. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Giả sử AH, AB lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d (*Hình 80*). Trong tam giác AHB, hãy so sánh:

a) Số đo góc AHB và số đo góc ABH;

b) Độ dài cạnh AB và độ dài cạnh AH.

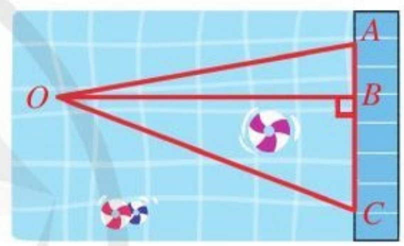


Hình 80

> Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Ví dụ 2

Hình 81 mô tả đường bơi của ba bạn ở một bể bơi. Bạn Đức bơi từ vị trí điểm A đến vị trí điểm O, bạn Minh bơi từ vị trí điểm B đến vị trí điểm O, bạn Cường bơi từ vị trí điểm C đến vị trí điểm O. Đường bơi của bạn nào ngắn nhất? Vì sao?



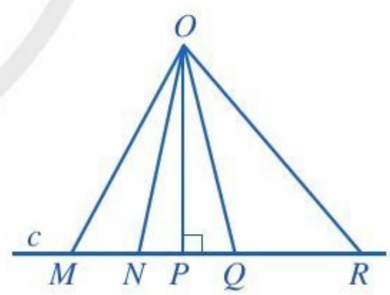
Hình 81

Giải

Do đoạn thẳng OB là đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AC; các đoạn thẳng OA, OC là các đường xiên kẻ từ O đến đường thẳng AC nên đoạn thẳng OB là đoạn ngắn nhất. Vậy đường bơi của bạn Minh là ngắn nhất.

Ví dụ 3

Trong các đoạn thẳng OM, ON, OP, OQ, OR (*Hình 82*), đoạn thẳng nào ngắn nhất? Vì sao?



Hình 82

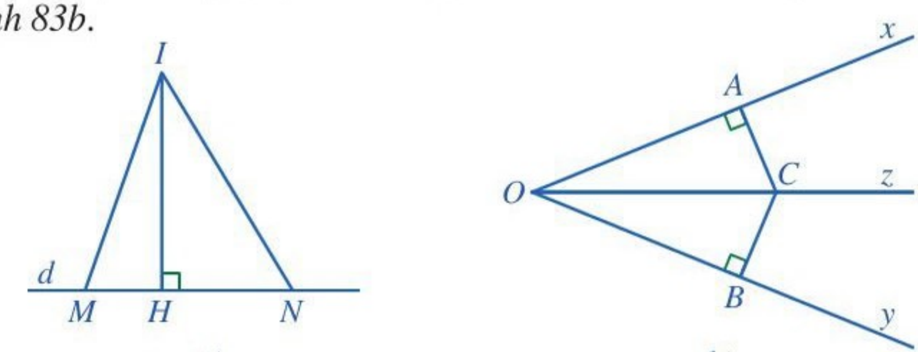
Giải

Do các đoạn thẳng OM, ON, OQ, OR là các đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng c và đoạn thẳng OP là đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng c nên đoạn thẳng OP là đoạn ngắn nhất.

2 Cho tam giác nhọn ABC, $\widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Sắp xếp các đoạn thẳng AB, AH, AC theo thứ tự độ dài tăng dần.

BÀI TẬP

1. Chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ điểm *I* trong *Hình 83a* và từ điểm *C* trong *Hình 83b*.



a) b)

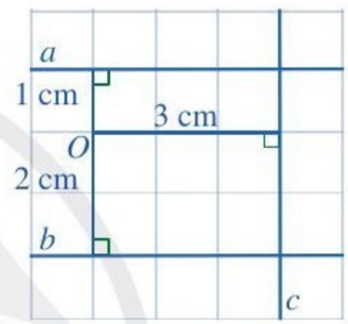
Hình 83

2. Quan sát *Hình 84* và cho biết:

a) Khoảng cách từ điểm *O* đến đường thẳng *a*;

b) Khoảng cách từ điểm *O* đến đường thẳng *b*;

c) Khoảng cách từ điểm *O* đến đường thẳng *c*.



Hình 84

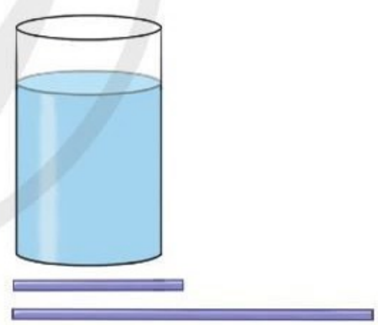
3. Cho tam giác nhọn *ABC*.

a) Vẽ *H* là hình chiếu của *B* trên đường thẳng *AC*.

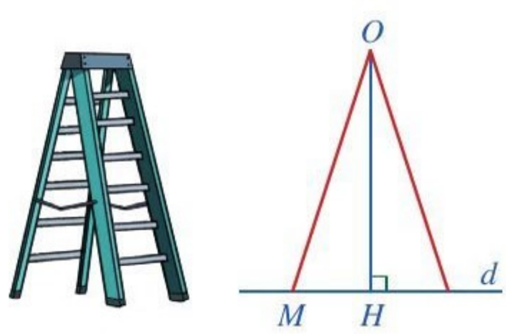
b) Vẽ *K* là hình chiếu của *H* trên đường thẳng *AB*.

c) Chứng minh rằng: $HK < BH < BC$.

4. Trong một thí nghiệm khoa học, bạn Duy đặt hai chiếc đũa thuỷ tinh, một chiếc dài 14 cm và một chiếc dài 30 cm vào một bình thuỷ tinh có dạng hình trụ đựng dung dịch, cả hai đũa đều chạm đáy bình. Đường kính của đáy bình là 12 cm, chiều cao của dung dịch trong bình là 15 cm (bỏ qua bề dày của bình). Hỏi bạn Duy có thể cầm vào chiếc đũa thuỷ tinh nào mà ngón tay không bị chạm vào dung dịch? Vì sao?



5. *Hình 85b* mô tả mặt cắt đứng của một chiếc thang chữ A (*Hình 85a*), trong đó độ dài của một bên thang được tính bằng độ dài đoạn thẳng *OM*, chiều cao của chiếc thang được tính bằng độ dài đoạn *OH*, với *H* là hình chiếu của điểm *O* trên đường thẳng *d*. Một người sử dụng thang này có thể đứng ở độ cao 4 m hay không nếu độ dài của một bên thang là 3,5 m? Vì sao?



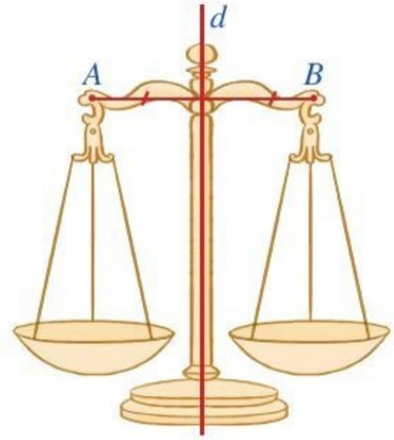
a) b)

Hình 85

§9. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Hình 86 minh hoạ chiếc cân thăng bằng và gợi nên hình ảnh đoạn thẳng AB, đường thẳng d.

Đường thẳng d có mối liên hệ gì với đoạn thẳng AB?



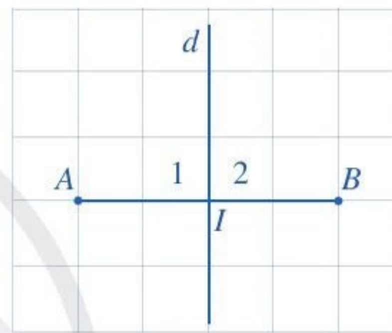
Hình 86

I. ĐỊNH NGHĨA

1 Quan sát *Hình 87*.

a) So sánh hai đoạn thẳng IA và IB.

b) Tìm số đo của các góc I_1, I_2.



Hình 87

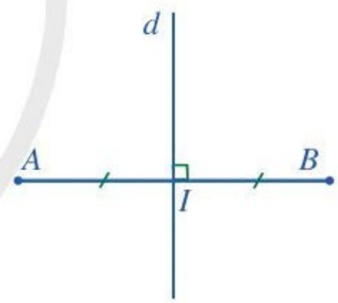
Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng ấy.

Trong *Hình 88*, ta có:

– Đoạn thẳng AB; trung điểm I của đoạn thẳng AB;

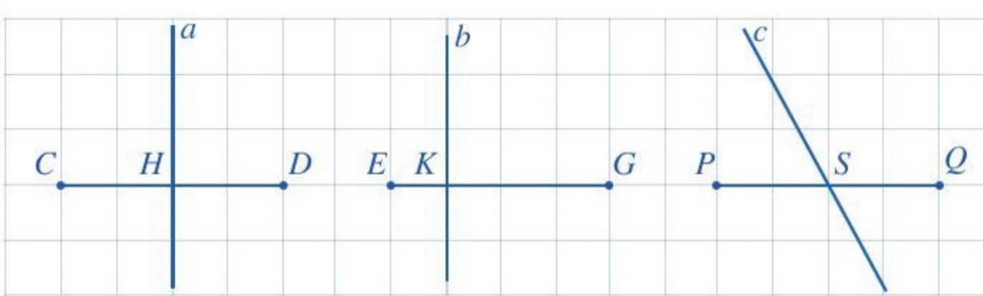
– Đường thẳng d vuông góc với AB tại I.

Vì thế, đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Hình 88

Ví dụ 1 Trong *Hình 89*, quan sát ba cặp đoạn thẳng và đường thẳng: CD và a, EG và b, PQ và c. Đường thẳng nào là đường trung trực của đoạn thẳng tương ứng trong ba cặp trên? Vì sao?



Hình 89

Giải

Đường thẳng a là đường trung trực của đoạn thẳng CD vì a là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng CD tại trung điểm H của đoạn thẳng CD.

Đường thẳng b không là đường trung trực của đoạn thẳng EG vì b không đi qua trung điểm của đoạn thẳng EG.

Đường thẳng c không là đường trung trực của đoạn thẳng PQ vì c không vuông góc với đoạn thẳng PQ.

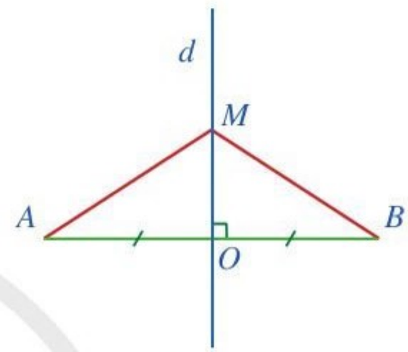
1 Cho tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Biết $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$. Chứng minh AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

II. TÍNH CHẤT

2 Cho đoạn thẳng AB có trung điểm O, d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, điểm M thuộc d, M khác O (*Hình 90*).

Chứng minh rằng:

a) $\Delta MOA = \Delta MOB$; b) $MA = MB$.



Hình 90

Ta có tính chất của đường trung trực như sau:

> Một điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

Gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Lấy điểm M trên đường thẳng d (*Hình 90*). Ta có $MA = MB$.

Ví dụ 2 Cho các điểm M, N thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB, M và N không thuộc đường thẳng AB. Chứng minh rằng $\Delta MNA = \Delta MNB$.

Giải

Xét hai tam giác MNA và MNB, ta có:

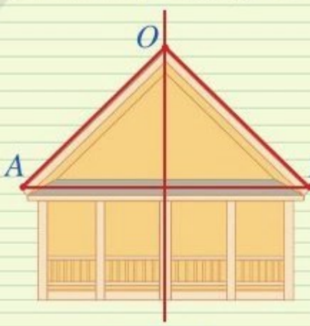
$MA = MB$ (vì M thuộc đường trung trực của AB);

$NA = NB$ (vì N thuộc đường trung trực của AB);

MN là cạnh chung.

Suy ra $\Delta MNA = \Delta MNB$ (c.c.c).

2 *Hình 91* mô tả mặt cắt đứng của một ngôi nhà với hai mái là OA và OB, mái nhà bên trái dài 3 m. Tính chiều dài mái nhà bên phải, biết rằng điểm O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.



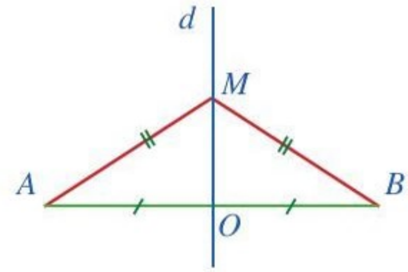
Hình 91

3 Cho đoạn thẳng AB có trung điểm O. Giả sử M là một điểm khác O sao cho $MA = MB$.

a) Hai tam giác ΔMOA và ΔMOB có bằng nhau hay không? Vì sao?

b) Đường thẳng MO có là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không? Vì sao?

Điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.



Hình 92

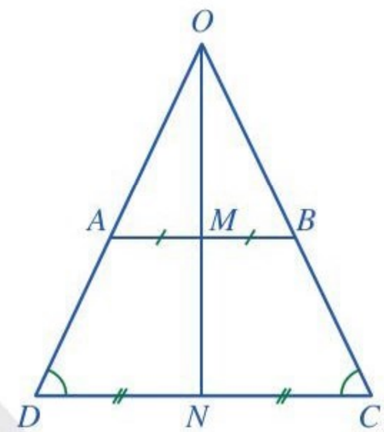
Gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, M là điểm sao cho $MA = MB$ (*Hình 92*). Ta có M nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 3 Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{C} = \widehat{D}$. Hai tia DA và CB cắt nhau tại O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD (*Hình 93*). Chứng minh:

a) Hai tam giác OCD và OAB là những tam giác cân;

b) Đường thẳng OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB;

c) Ba điểm O, M, N thẳng hàng.



Hình 93

Giải

a) Do $\widehat{C} = \widehat{D}$ nên tam giác OCD cân tại O.

Do $AB \parallel CD$ nên $\widehat{OAB} = \widehat{D}$, $\widehat{OBA} = \widehat{C}$ (hai góc đồng vị).

Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Vậy tam giác OAB cân tại O.

b) Do tam giác OAB cân tại O nên $OA = OB$.

Lại có $MA = MB$ (giả thiết), suy ra OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Do tam giác OCD cân tại O nên $OC = OD$.

Lại có $NC = ND$ (giả thiết), suy ra ON là đường trung trực của đoạn thẳng CD. Do đó $ON \perp CD$.

Vì OM là đường trung trực của AB nên $OM \perp AB$. Mà $AB \parallel CD$ nên $OM \perp CD$.

Do OM và ON cùng vuông góc với CD nên ba điểm O, M, N thẳng hàng.

3 Cho tam giác ABC cân tại A.

a) Điểm A có thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC hay không? Vì sao?

b) Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt cạnh BC tại H. Đường thẳng AH có là đường trung trực của đoạn thẳng BC hay không? Vì sao?

III. VẼ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

4 Dùng thước thẳng (có chia đơn vị) và compa vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB, biết $AB = 3$ cm.

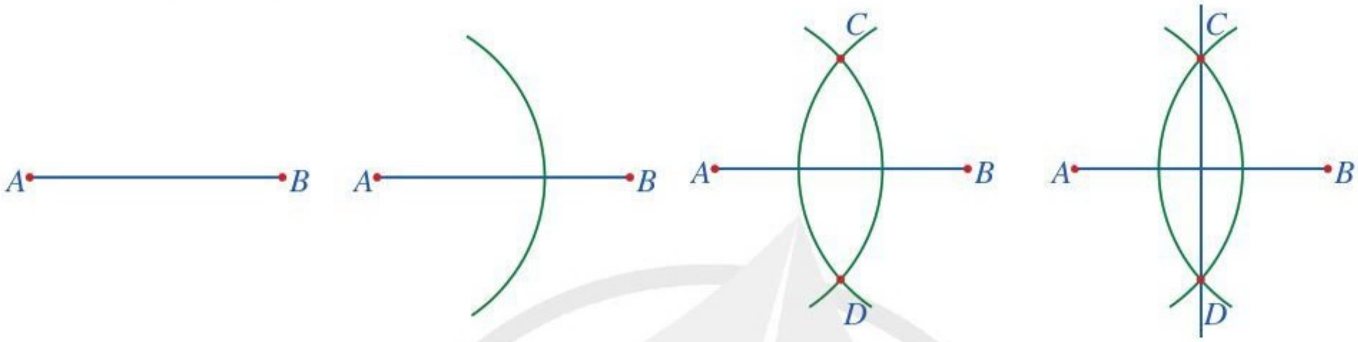
Để vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta làm như sau:

Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $AB = 3$ cm

Bước 2. Vẽ một phần đường tròn tâm A bán kính 2 cm

Bước 3. Vẽ một phần đường tròn tâm B bán kính 2 cm, cắt phần đường tròn tâm A vẽ ở *Bước 2* tại các điểm C và D

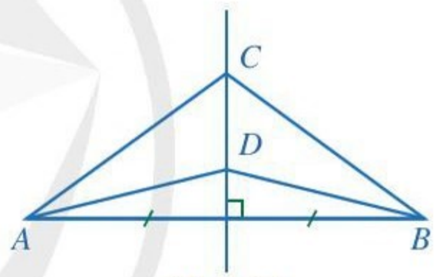
Bước 4. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm C và D. Đường thẳng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Bước 1 *Bước 2* *Bước 3* *Bước 4*

BÀI TẬP

1. Trong *Hình 94*, đường thẳng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Chứng minh $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.



Hình 94

2. Trong *Hình 95*, đường thẳng a là đường trung trực của cả hai đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh:

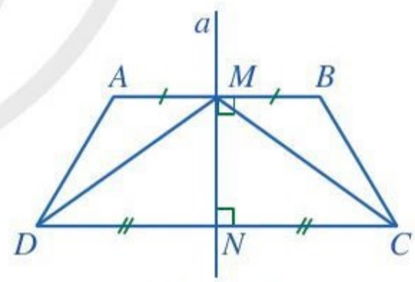
a) $AB \parallel CD$;

b) $\Delta MNC = \Delta MND$;

c) $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$;

d) $AD = BC$, $\widehat{A} = \widehat{B}$;

e) $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.



Hình 95

3. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Gọi a và b lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng AB và BC. Chứng minh rằng $a \parallel b$.

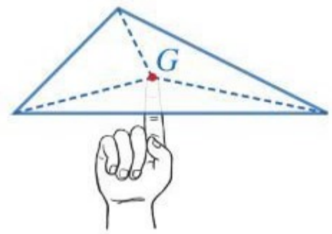
4. Cho đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Điểm M không thuộc đường thẳng d và đoạn thẳng AB sao cho đường thẳng d cắt đoạn thẳng MB tại điểm I. Chứng minh:

a) $MB = AI + IM$; b) $MA < MB$.

§10. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Hình 96 minh hoạ một miếng bìa phẳng có dạng hình tam giác đặt thăng bằng trên đầu ngón tay tại điểm G.

Điểm G được xác định như thế nào?

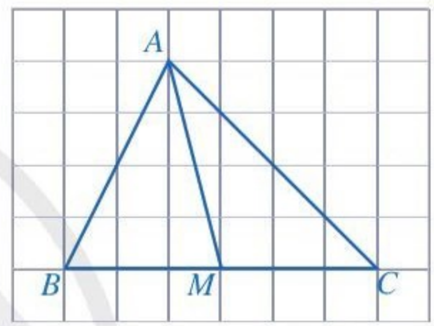


Hình 96

I. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

1 Quan sát *Hình 97* và cho biết các đầu mút của đoạn thẳng AM có đặc điểm gì.

Trong tam giác ABC (*Hình 97*), đoạn thẳng AM nối đỉnh A với trung điểm M của cạnh BC được gọi là *đường trung tuyến* (xuất phát từ đỉnh A hoặc tương ứng với cạnh BC).



Hình 97

Đôi khi, đường thẳng AM cũng được gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

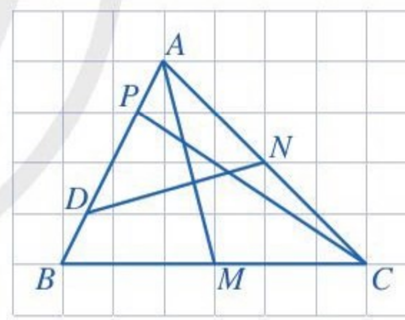
Ví dụ 1 Trong ba đoạn thẳng AM, DN, CP (*Hình 98*), đoạn thẳng nào là đường trung tuyến của tam giác ABC?

Giải

– Đoạn thẳng AM là đường trung tuyến của tam giác ABC vì A là đỉnh của tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh BC.

– Đoạn thẳng DN không là đường trung tuyến của tam giác ABC vì cả D và N không là đỉnh của tam giác ABC.

– Đoạn thẳng CP không là đường trung tuyến của tam giác ABC vì C là đỉnh của tam giác ABC mà P không là trung điểm của cạnh AB.

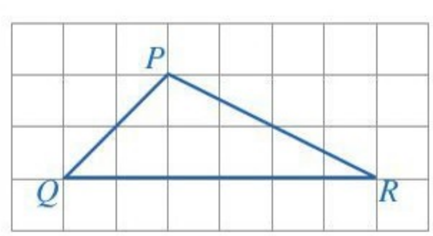


Hình 98

Ví dụ 2 Cho tam giác PQR (*Hình 99*). Vẽ các đường trung tuyến của tam giác đó.

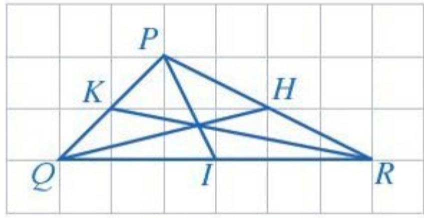
Giải

– Vẽ I, H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh QR, PR, PQ.



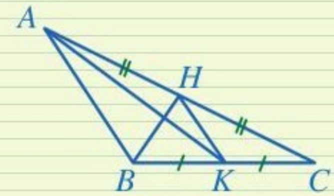
Hình 99

– Vẽ các đoạn thẳng PI, QH, RK. Các đoạn thẳng đó là các đường trung tuyến của tam giác PQR (*Hình 100*).



Hình 100

1 Trong *Hình 101*, đoạn thẳng HK là đường trung tuyến của những tam giác nào?

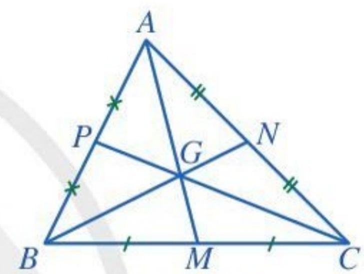


Hình 101

Nhận xét: Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

II. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

2 Quan sát các đường trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC trong *Hình 102*, cho biết ba đường trung tuyến đó có cùng đi qua một điểm hay không.



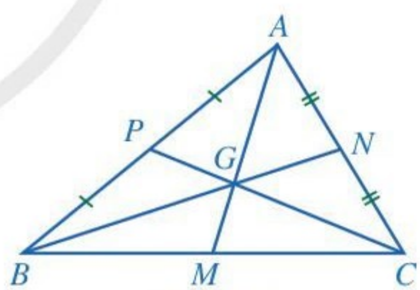
Hình 102

Ta có *định lí* sau:

> Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là *trọng tâm* của tam giác.

Chú ý: Trong tam giác ABC, ba đường trung tuyến AM, BN, CP cùng đi qua điểm G, ta còn nói chúng đồng quy tại điểm G (*Hình 102*). Do đó, để xác định trọng tâm của một tam giác, ta chỉ cần vẽ hai đường trung tuyến bất kì và xác định giao điểm của hai đường đó.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN và CP cắt nhau tại G. Đường thẳng AG cắt BC tại M (*Hình 103*). Chứng minh rằng M là trung điểm của cạnh BC.



Hình 103

Giải

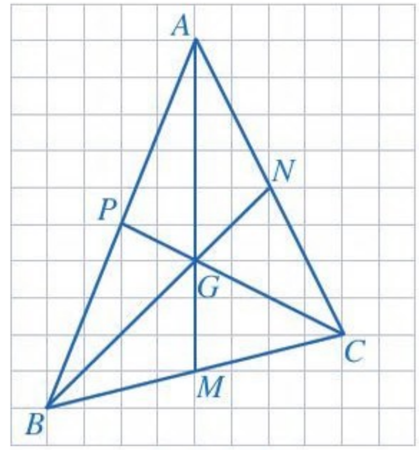
Hai đường trung tuyến BN và CP cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC. Vì $G \in AM$ nên AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Vậy M là trung điểm của cạnh BC.

2 Cho tam giác PQR có hai đường trung tuyến QM và RK cắt nhau tại G. Gọi I là trung điểm của cạnh QR. Chứng minh rằng ba điểm P, G, I thẳng hàng.

3 Quan sát các đường trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC trong *Hình 104*. Bằng cách đếm số ô vuông, tìm các tỉ số

$$\frac{AG}{AM}, \frac{BG}{BN}, \frac{CG}{CP}.$$

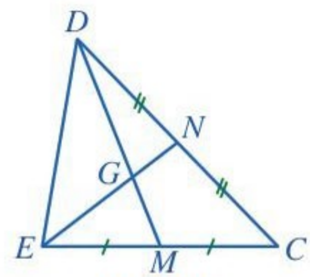
Nhận xét: Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Hình 104

Ví dụ 4 Quan sát *Hình 105* và tìm số thích hợp cho $\boxed{?}$:

$EG = \boxed{?}\,EN$, $EN = \boxed{?}\,GN$, $GN = \boxed{?}\,EG$, $DG = \boxed{?}\,GM$.



Hình 105

Giải

Tam giác DEC có G là giao điểm của hai đường trung tuyến DM và EN nên G là trọng tâm của tam giác.

Suy ra $EG = \frac{2}{3}EN$.

Ta có: $GN = EN - EG = EN - \frac{2}{3}EN = \frac{1}{3}EN$

hay $EN = 3GN$.

Từ đó suy ra $GN = \frac{1}{2}EG$. Tương tự, ta có $DG = 2GM$.

Trong tam giác ABC, với AM là đường trung tuyến và G là trọng tâm ta có: $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}, \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại trọng tâm G. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của GB và GC. Chứng minh:

a) $\Delta GMN = \Delta GPQ$; b) $MN // PQ$.

Giải. (*Hình 106*)

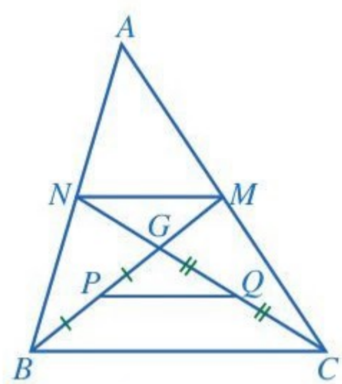
a) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$GM = \frac{1}{2}GB, \; GN = \frac{1}{2}GC.$$

Vì P, Q lần lượt là trung điểm của GB, GC nên

$$GP = \frac{1}{2}GB, \; GQ = \frac{1}{2}GC.$$

Suy ra: $GM = GP$, $GN = GQ$.



Hình 106

Xét hai tam giác GMN và GPQ, ta có:

$GM = GP$; $\widehat{MGN} = \widehat{PGQ}$ (hai góc đối đỉnh); $GN = GQ$.

Suy ra $\Delta GMN = \Delta GPQ$ (c.g.c).

b) Vì $\Delta GMN = \Delta GPQ$ nên $\widehat{GMN} = \widehat{GPQ}$ (hai góc tương ứng), mà chúng ở vị trí so le trong nên $MN // PQ$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. Ba đường trung tuyến AM, BN, CP đồng quy tại G. Chứng minh:

$$GA + GB + GC = \frac{2}{3}(AM + BN + CP).$$

2. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Chứng minh:

a) $BM = CN$;   b) ΔGBC cân tại G.

3. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MG$. Chứng minh:

a) $GA = GD$;   b) $\Delta MBG = \Delta MCD$;   c) $CD = 2GN$.

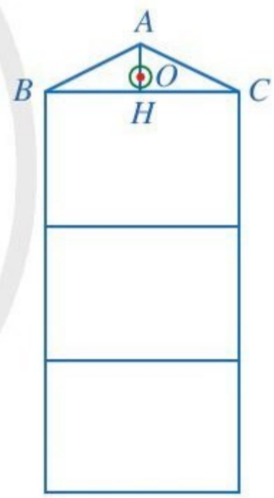
4. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC. Giả sử H là trung điểm của đoạn thẳng BM. Chứng minh:

a) $\Delta AHB = \Delta AHM$;   b) $AG = \dfrac{2}{3}AB$.

5. *Hình 107* là mặt cắt đứng của một ngôi nhà ba tầng có mái dốc. Mỗi tầng cao 3,3 m. Mặt cắt mái nhà có dạng tam giác ABC cân tại A với đường trung tuyến AH dài 1,2 m. Tại vị trí O là trọng tâm tam giác ABC, người ta làm tâm cho một cửa sổ có dạng hình tròn.

a) AH có vuông góc với BC không? Vì sao?

b) Vị trí O ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất.



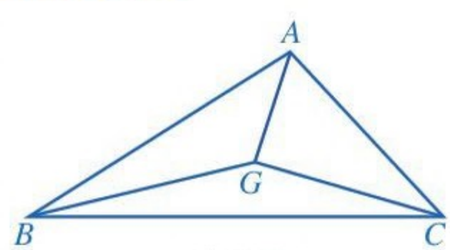
Hình 107

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Tính chất khác của trọng tâm tam giác

• Nếu nối ba đỉnh của tam giác ABC với trọng tâm G của tam giác đó thì tam giác ABC được chia thành ba tam giác nhỏ GAB, GCA, GBC có diện tích bằng nhau (*Hình 108*).

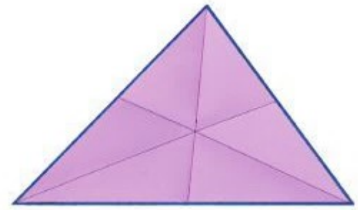
• Điểm đặt G làm cho miếng bìa hình tam giác giữ thăng bằng trên đầu ngón tay *(phần mở đầu bài học)* chính là trọng tâm của tam giác đó.



Hình 108

§11. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

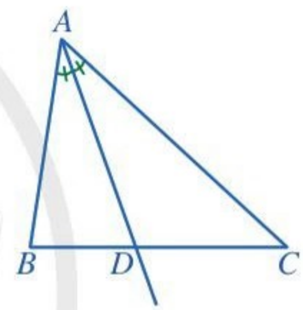
Bạn Ngân gấp một miếng bìa hình tam giác để các nếp gấp tạo thành ba tia phân giác của các góc ở đỉnh của tam giác đó (*Hình 109*).



Hình 109

I. ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

1 Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D (*Hình 110*). Các đầu mút của đoạn thẳng AD có đặc điểm gì?



Hình 110

Trong tam giác *ABC* (*Hình 110*), tia phân giác của góc *A* cắt cạnh *BC* tại điểm *D*. Khi đó, đoạn thẳng *AD* được gọi là *đường phân giác* (xuất phát từ đỉnh *A*) của tam giác *ABC*.

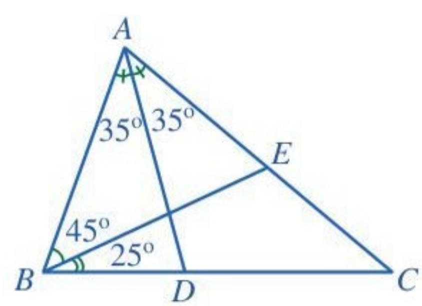
Đôi khi, đường thẳng AD cũng được gọi là đường phân giác của tam giác ABC.

Ví dụ 1 Trong hai đoạn thẳng AD, BE (*Hình 111*), đoạn thẳng nào là đường phân giác của tam giác ABC?

Giải

– Đoạn thẳng AD là đường phân giác của tam giác ABC vì D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC.

– Đoạn thẳng BE không là đường phân giác của tam giác ABC vì BE không là tia phân giác góc B của tam giác ABC.



Hình 111

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường trung tuyến AD. Chứng minh AD cũng là đường phân giác của tam giác đó.

Giải. (*Hình 112*)

Xét hai tam giác *ABD* và *ACD* có:

AD là cạnh chung;

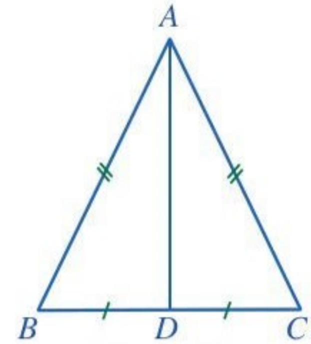
DB = *DC* (vì *D* là trung điểm của *BC*);

AB = *AC* (hai cạnh bên của tam giác cân).

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.c.c).

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (hai góc tương ứng).

Vậy *AD* là đường phân giác của tam giác *ABC*.



Hình 112

1 Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Vẽ đường phân giác *AD*. Chứng minh *AD* cũng là đường trung tuyến của tam giác đó.

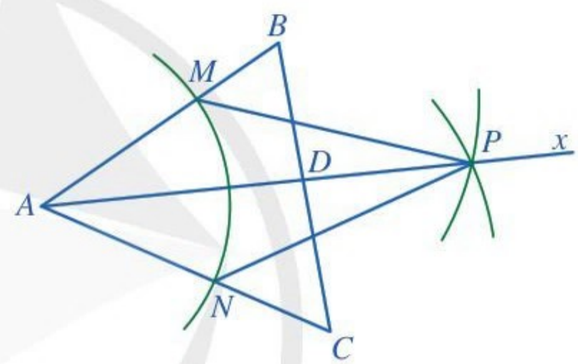
Ví dụ 3 Cho tam giác *ABC*. Vẽ các đường phân giác của tam giác đó.

Hướng dẫn

Trước hết, ta vẽ đường phân giác *AD* của tam giác *ABC* như sau (*Hình 113*):

Bước 1. Bằng thước thẳng và compa vẽ tia phân giác *Ax* của góc *BAC* (tương tự như trong *Ví dụ 2*, trang 81)

Bước 2. Vẽ *D* là giao điểm của tia *Ax* với cạnh *BC*.



Hình 113

Ta vẽ các đường phân giác xuất phát từ đỉnh *B* và đỉnh *C* của tam giác *ABC* bằng cách tương tự.

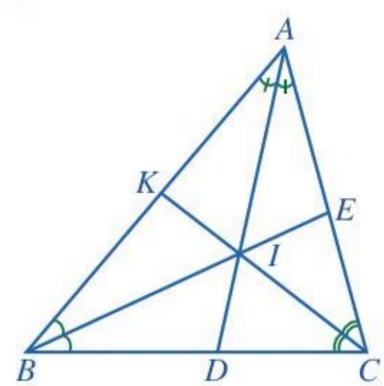
Nhận xét: Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

II. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

2 Quan sát các đường phân giác *AD*, *BE*, *CK* của tam giác *ABC* (*Hình 114*), cho biết ba đường phân giác đó có cùng đi qua một điểm hay không.

Ta có *định lí* sau:

Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm.



Hình 114

Nhận xét: Để xác định giao điểm ba đường phân giác của một tam giác, ta chỉ cần vẽ hai đường phân giác bất kì và xác định giao điểm của hai đường đó.

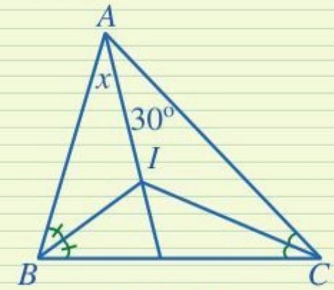
Ví dụ 4 Tam giác ABC có hai đường phân giác BE và CK cắt nhau tại I. Điểm I có nằm trên tia phân giác của góc BAC không? Vì sao?

Giải

Vì ba đường phân giác của tam giác ABC cùng đi qua một điểm nên giao điểm I của hai đường phân giác BE và CK cũng thuộc đường phân giác xuất phát từ đỉnh A.

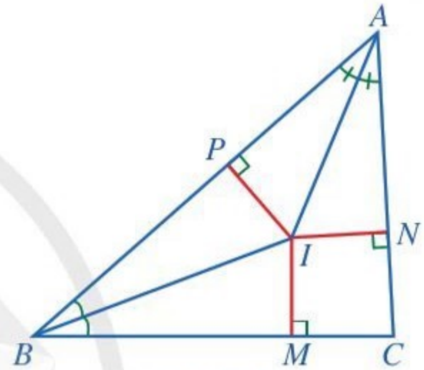
Vậy điểm I nằm trên tia phân giác của góc BAC.

2 Tìm số đo x trong *Hình 115*.



Hình 115

3 Quan sát giao điểm I của ba đường phân giác trong tam giác ABC và ba đoạn thẳng IM, IN, IP (*Hình 116*), cho biết ba đoạn thẳng trên có bằng nhau hay không.



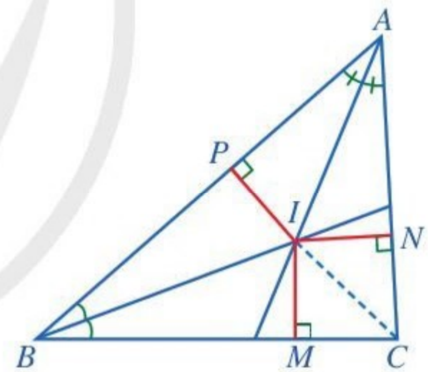
Hình 116

Nhận xét: Giao điểm ba đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Kết hợp định lí và nhận xét trên, ta có: *Trong tam giác ABC, ba đường phân giác cùng đi qua một điểm và điểm đó cách đều ba cạnh của tam giác.*

Để chứng minh nhận định trên, ta làm như sau:

Vẽ các đường phân giác của các góc BAC và CBA cắt nhau tại I. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, CA, AB (*Hình 117*).



Hình 117

Vì I nằm trên tia phân giác của góc BAC nên $IN = IP$. Tương tự ta có $IP = IM$.

Suy ra $IM = IN$. Do đó điểm I nằm trên đường phân giác của góc ACB.

Vậy ba đường phân giác của tam giác ABC cùng đi qua điểm I.

Mặt khác, ta có: $IM = IN = IP$. Vậy điểm I cách đều ba cạnh của tam giác ABC.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC vuông tại B có điểm I là giao điểm của các đường phân giác của các góc B và C. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các cạnh BC, CA, AB. Cho biết $BM = 1$ cm (*Hình 118*). Tính độ dài các đoạn thẳng IM, IN, IP.

Giải

Do điểm I là giao điểm của các đường phân giác của các góc B và C nên I cũng là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC. Vì thế $IM = IN = IP$.

Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\widehat{IBC} = \widehat{IBA} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 90^o = 45^o,$$

tức là $\widehat{MBI} = 45^o$.

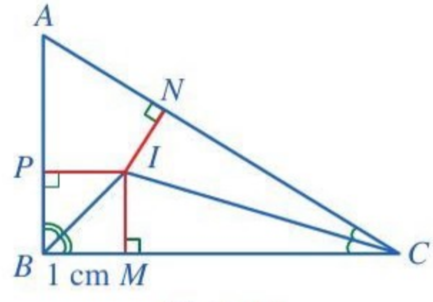
Trong tam giác vuông MBI, ta có: $\widehat{MIB} + \widehat{MBI} = 90^o$

nên $\widehat{MIB} = 90^o - \widehat{MBI} = 90^o - 45^o = 45^o$.

Suy ra tam giác MBI là tam giác vuông cân tại M.

Do đó $IM = BM = 1$ cm.

Vậy $IM = IN = IP = 1$ cm.



Hình 118

3 Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. M, N, P lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: IA, IB, IC lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng NP, PM, MN.

BÀI TẬP

1. Tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, CA, AB.

a) Các tam giác IMN, INP, IPM có là tam giác cân không? Vì sao?

b) Các tam giác ANP, BPM, CMN có là tam giác cân không? Vì sao?

2. Tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) $\widehat{IAB} + \widehat{IBC} + \widehat{ICA} = 90^o$;

b) $\widehat{BIC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

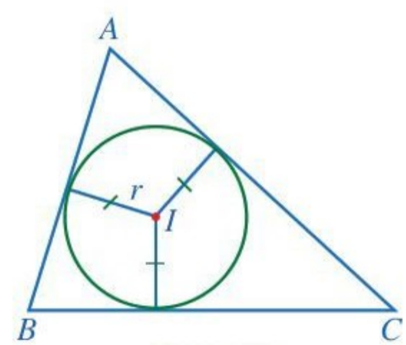
3. Tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I và $AB < AC$.

a) Chứng minh $\widehat{CBI} > \widehat{ACI}$;

b) So sánh IB và IC.

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Trong tam giác ABC, vẽ đường tròn có tâm I là giao điểm của ba đường phân giác và bán kính bằng khoảng cách r từ điểm I đến ba cạnh của tam giác (*Hình 119*). Sau này, ta sẽ gọi đường tròn trên là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.



Hình 119

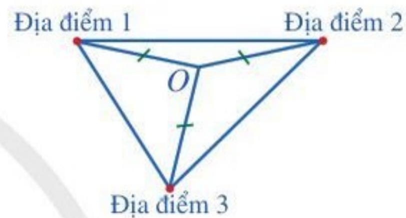
§12. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

Hình 121 minh hoạ biển giới thiệu quần thể di tích, danh thắng cấp Quốc gia núi Dũng Quyết và khu vực Phượng Hoàng Trung Đô ở tỉnh Nghệ An (*Hình 120*).

(*Ảnh: Phạm Xuân Chung*)

Hình 120

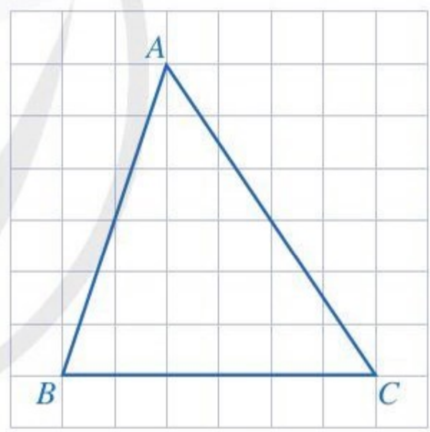
Làm thế nào để xác định được vị trí cách đều ba địa điểm được minh hoạ trong Hình 121?



Hình 121

I. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

1 Cho tam giác *ABC* như *Hình 122*. Vẽ đường trung trực *d* của đoạn thẳng *BC*.



Hình 122

Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh được gọi là đường trung trực của tam giác đó.

Chú ý: Đường trung trực của một tam giác có thể không đi qua đỉnh nào của tam giác.

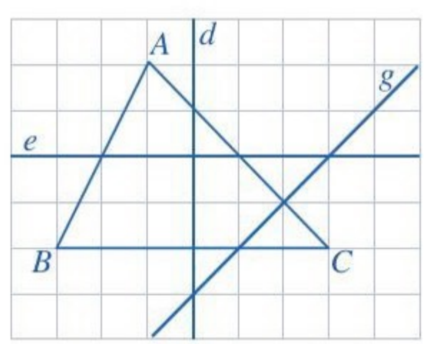
Ví dụ 1 Trong ba đường thẳng *d, e, g* (*Hình 123*), đường thẳng nào là đường trung trực của tam giác *ABC*?

Giải

– Đường thẳng *d* là đường trung trực của tam giác *ABC* vì đường thẳng *d* vuông góc với cạnh *BC* tại trung điểm của cạnh đó.

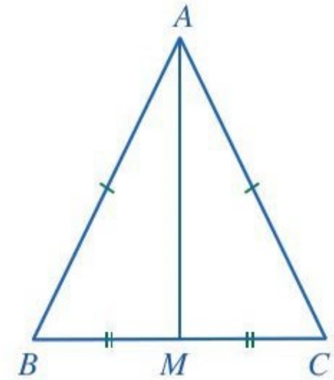
– Đường thẳng *e* không là đường trung trực của tam giác *ABC* vì đường thẳng *e* không vuông góc với bất kì cạnh nào của tam giác đó.

– Đường thẳng *g* không là đường trung trực của tam giác *ABC* vì đường thẳng *g* không đi qua trung điểm của bất kì cạnh nào của tam giác đó.



Hình 123

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường trung tuyến AM. Chứng minh AM là đường trung trực của tam giác ABC.



Hình 124

Giải. (*Hình 124*)

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$.

Suy ra A nằm trên đường trung trực của BC.

Vì AM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $MB = MC$.

Suy ra M nằm trên đường trung trực của BC.

Vậy AM là đường trung trực của tam giác ABC.

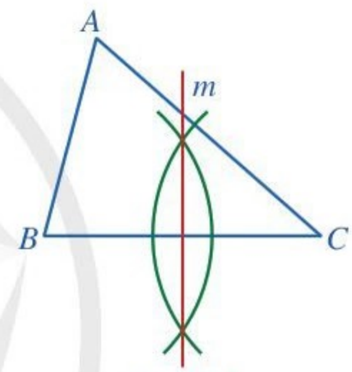
1 Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường phân giác AD. Chứng minh AD cũng là đường trung trực của tam giác ABC.

Ví dụ 3 Cho tam giác nhọn ABC. Dùng thước thẳng và compa vẽ các đường trung trực của tam giác đó.

Hướng dẫn

Vẽ đường trung trực m của cạnh BC (Xem *Hình 125*).

Hai đường trung trực của các cạnh AB, AC được vẽ tương tự.

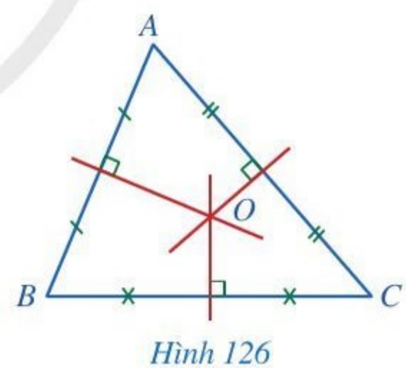


Hình 125

Nhận xét: Mỗi tam giác có ba đường trung trực.

II. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

2 Quan sát các đường trung trực của tam giác ABC (*Hình 126*), cho biết ba đường trung trực đó có cùng đi qua một điểm hay không.



Hình 126

Ta có *định lí* sau:

> Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm.

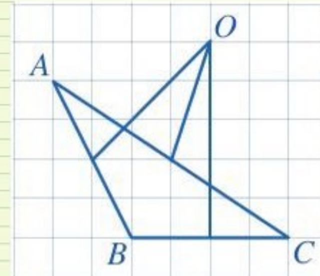
Nhận xét: Để xác định giao điểm ba đường trung trực của một tam giác, ta chỉ cần vẽ hai đường trung trực bất kì và xác định giao điểm của hai đường đó.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có đường trung trực của hai cạnh AB và BC cắt nhau tại O. Điểm O có nằm trên đường trung trực của cạnh AC không? Vì sao?

Giải

Vì ba đường trung trực của tam giác ABC cùng đi qua một điểm nên giao điểm O của hai đường trung trực của các cạnh AB và BC cũng thuộc đường trung trực của cạnh AC. Vậy điểm O nằm trên đường trung trực của cạnh AC.

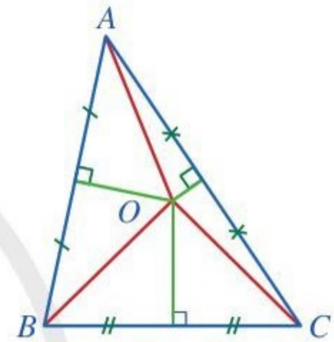
2 Trong *Hình 127*, điểm O có phải là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC không?



Hình 127

3 Quan sát giao điểm O của ba đường trung trực của tam giác ABC và ba đoạn thẳng OA, OB, OC (*Hình 128*), cho biết ba đoạn thẳng trên có bằng nhau hay không.

Nhận xét: Giao điểm ba đường trung trực của một tam giác cách đều ba đỉnh của tam giác đó.



Hình 128

Kết hợp định lí và nhận xét trên, ta có: *Trong một tam giác, ba đường trung trực cùng đi qua một điểm và điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.*

Để chứng minh nhận định trên, ta làm như sau:

Vẽ các đường trung trực m, n lần lượt của các cạnh AB và AC. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng m và n (*Hình 129*).

Vì O nằm trên đường trung trực của cạnh AB nên $OA = OB$.

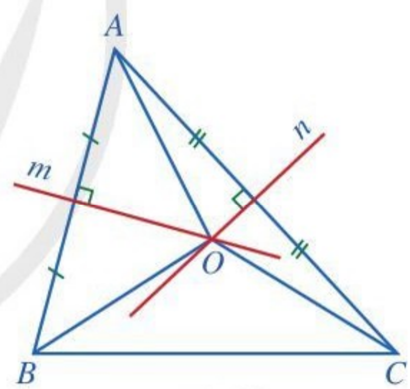
Tương tự, ta có $OA = OC$.

Suy ra $OB = OC$. Do đó điểm O nằm trên đường trung trực của cạnh BC.

Vậy ba đường trung trực của tam giác ABC cùng đi qua điểm O.

Mặt khác, ta có: $OA = OB = OC$.

Vậy điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

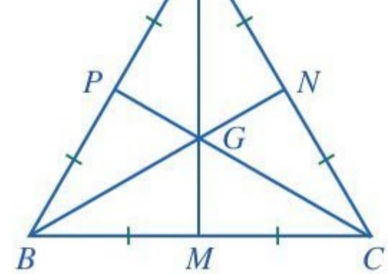


Hình 129

Ví dụ 5 Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm. Chứng minh G cũng là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Giải. (*Hình 130*)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên các đường thẳng AG, BG, CG lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh này.



Hình 130

Tam giác ABC đều nên tam giác ABC cân tại đỉnh A. Suy ra $AB = AC$.

Do $AB = AC$, $MB = MC$ nên AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vì thế, đường trung tuyến AM cũng là đường trung trực của tam giác ABC.

Tương tự các đường trung tuyến BN, CP cũng là các đường trung trực của tam giác ABC. Do đó G là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

Vậy G cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC và điểm O thoả mãn $OA = OB = OC$. Chứng minh rằng O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

2. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C trong mỗi trường hợp sau:

a) Tam giác ABC nhọn;

b) Tam giác ABC vuông tại A;

c) Tam giác ABC có góc A tù.

3. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại G. Biết rằng điểm G cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC đều.

4. Tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I. Biết rằng I cũng là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC đều.

5. Cho tam giác ABC. Đường trung trực của hai cạnh AB và AC cắt nhau tại điểm O nằm trong tam giác. M là trung điểm của BC. Chứng minh:

a) $OM \perp BC$; b) $\widehat{MOB} = \widehat{MOC}$.

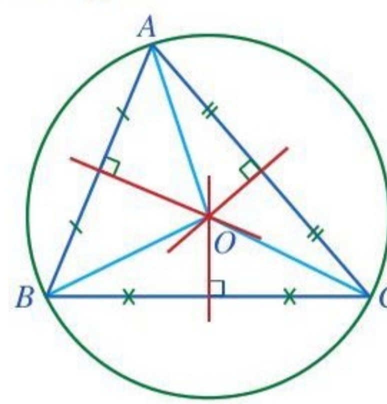
CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác

Nếu O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC thì $OA = OB = OC$.

Đặt $R = OA$. Đường tròn tâm O bán kính R đi qua ba đỉnh của tam giác ABC (*Hình 131*). Sau này, ta sẽ gọi đường tròn đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Nếu tam giác ABC nhọn thì điểm O nằm trong tam giác. Nếu tam giác ABC vuông thì điểm O là trung điểm của cạnh huyền. Nếu tam giác ABC tù thì điểm O nằm ngoài tam giác.

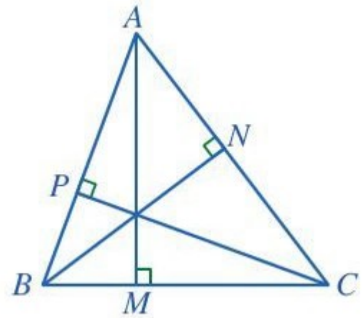


Hình 131

§13. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

Cho tam giác *ABC*. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là hình chiếu của *A*, *B*, *C* trên các đường thẳng *BC*, *CA*, *AB* (*Hình 132*).

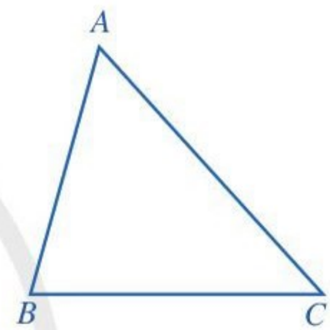
Em có nhận xét gì về ba đường thẳng AM, BN, CP?



Hình 132

I. ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

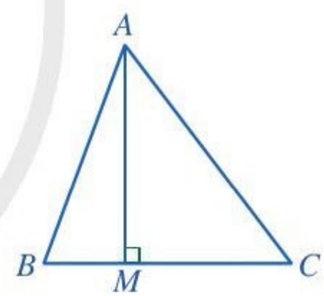
1 Cho tam giác *ABC* (*Hình 133*). Bằng cách sử dụng ê ke, vẽ hình chiếu *M* của điểm *A* trên đường thẳng *BC*.



Hình 133

Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là một *đường cao* của tam giác đó.

Trong *Hình 134*, đoạn thẳng *AM* là một đường cao của tam giác *ABC*. Đôi khi, ta cũng gọi đường thẳng *AM* là một đường cao của tam giác *ABC*.



Hình 134

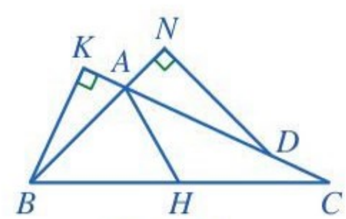
Ví dụ 1 Trong ba đoạn thẳng *AH*, *BK*, *DN*, đoạn thẳng nào là đường cao của tam giác *ABC* (*Hình 135*)?

Giải

– Đoạn thẳng *AH* không là đường cao của tam giác *ABC* vì *A* là đỉnh của tam giác *ABC* mà *AH* không vuông góc với *BC*.

– Đoạn thẳng *BK* là đường cao của tam giác *ABC* vì *B* là đỉnh của tam giác *ABC* và *BK* vuông góc với *AC*.

– Đoạn thẳng *DN* không là đường cao của tam giác *ABC* vì cả *D* và *N* không là đỉnh của tam giác *ABC*.

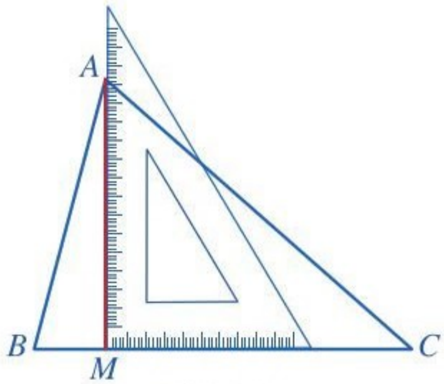


Hình 135

Ví dụ 2 Cho tam giác nhọn *ABC*. Sử dụng ê ke để vẽ các đường cao của tam giác *ABC*.

Hướng dẫn

Vẽ đường cao *AM* của tam giác *ABC* (xem *Hình 136*).



Hình 136

> **1** Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy đọc tên đường cao đi qua B, đường cao đi qua C.

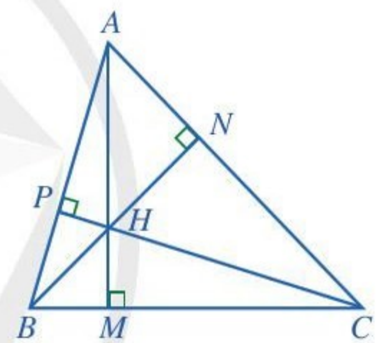
Hai đường cao BN, CP được vẽ tương tự.

Nhận xét

- Mỗi tam giác có ba đường cao;
- Đường cao của tam giác có thể nằm trong, trên cạnh, hoặc nằm ngoài tam giác.

II. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

2 Quan sát ba đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC (*Hình 137*), cho biết ba đường cao đó có cùng đi qua một điểm hay không.



Hình 137

Ta có *định lí* sau:

> Trong một tam giác, ba đường cao cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là *trực tâm* của tam giác.

Nhận xét: Để xác định trực tâm của một tam giác, ta chỉ cần vẽ hai đường cao bất kì và xác định giao điểm của hai đường đó.

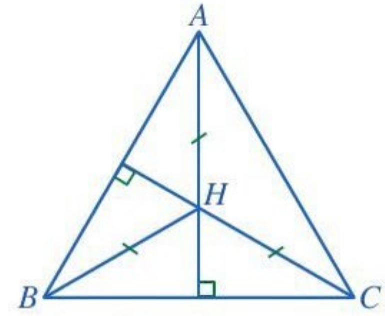
Ví dụ 3 Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao AM, BN cắt nhau tại H. Đường thẳng CH có vuông góc với đường thẳng AB không? Vì sao?

Giải

Vì ba đường cao của tam giác ABC cùng đi qua một điểm nên giao điểm H của hai đường cao AM và BN cũng thuộc đường cao đi qua C. Vậy đường thẳng CH vuông góc với đường thẳng AB.

> **2** Cho tam giác đều ABC có trọng tâm là G. Chứng minh G cũng là trực tâm của tam giác ABC.

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có trực tâm H thoả mãn $HA = HB = HC$ (*Hình 138*). Chứng minh tam giác ABC đều.



Hình 138

Giải

Vì $HB = HC$ nên H thuộc đường trung trực của cạnh BC.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$.

Đường thẳng AH và đường trung trực của cạnh BC cùng đi qua H và vuông góc với BC nên chúng trùng nhau.

Suy ra AH là đường trung trực của BC. Do đó $AB = AC$.

Chứng minh tương tự, ta có $BC = CA$.

Suy ra $AB = BC = CA$. Vậy tam giác ABC đều.

3 Cho tam giác ABC có trực tâm H cũng là trọng tâm của tam giác. Chứng minh tam giác ABC đều.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có H là trực tâm, H không trùng với đỉnh nào của tam giác. Nêu một tính chất của cặp đường thẳng:

a) AH và BC; b) BH và CA; c) CH và AB.

2. Cho tam giác ABC. Vẽ trực tâm H của tam giác ABC và nhận xét vị trí của nó trong các trường hợp sau:

a) Tam giác ABC nhọn;

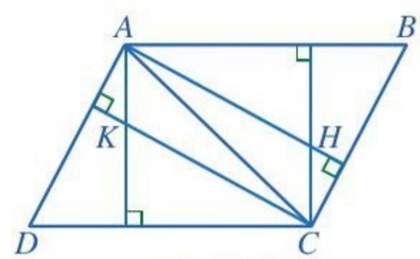
b) Tam giác ABC vuông tại A;

c) Tam giác ABC có góc A tù.

3. Cho tam giác nhọn ABC và điểm D nằm trong tam giác. Chứng minh rằng nếu DA vuông góc với BC và DB vuông góc với CA thì DC vuông góc với AB.

4. Cho tam giác nhọn ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H, $\widehat{HCA} = 25^\circ$. Tính $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HBA}$.

5. Trong *Hình 139*, cho biết $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$; H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và ACD. Chứng minh $AK \parallel CH$ và $AH \parallel CK$.



Hình 139

6. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, H là trực tâm, I là giao điểm của ba đường phân giác, O là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng:

a) Nếu tam giác ABC đều thì bốn điểm G, H, I, O trùng nhau;

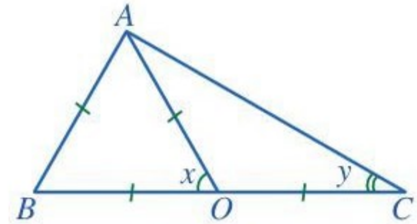
b) Nếu tam giác ABC có hai điểm trong bốn điểm G, H, I, O trùng nhau thì tam giác ABC là tam giác đều.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

1. Cho tam giác ABC có: $\widehat{A} = 42^{\circ}$, $\widehat{B} = 37^{\circ}$.

a) Tính $\widehat{C}$.

b) So sánh độ dài các cạnh AB, BC, CA.



Hình 140

2. Tìm các số đo x, y trong *Hình 140*.

3. Bạn Hoa đánh dấu ba vị trí A, B, C trên một phần sơ đồ xe buýt ở Hà Nội năm 2021 và xem xe buýt có thể đi như thế nào giữa hai vị trí A và B. Đường thứ nhất đi từ A đến C và đi tiếp từ C đến B, đường thứ hai đi từ B đến A (*Hình 141*). Theo em, đường nào đi dài hơn? Vì sao?

(*Nguồn: https://xe-buyt.com*)

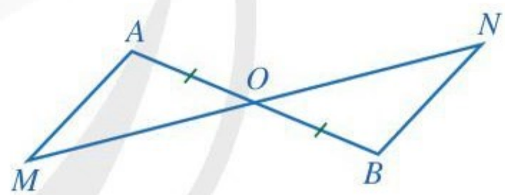
Hình 141

4. Cho hai tam giác ABC và MNP có: $AB = MN$, $BC = NP$, $CA = PM$. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của BC và NP. Chứng minh $AI = MK$.

5. Cho *Hình 142* có O là trung điểm của đoạn thẳng AB và O nằm giữa hai điểm M, N. Chứng minh:

a) Nếu $OM = ON$ thì $AM \parallel BN$;

b) Nếu $AM \parallel BN$ thì $OM = ON$.



Hình 142

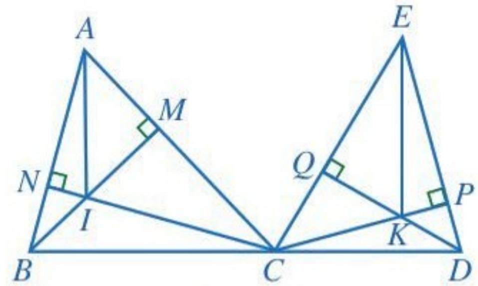
6. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{ABC} = 70^{\circ}$. Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC.

b) Chứng minh $BD = CE$.

c) Chứng minh tia AH là tia phân giác của góc BAC.

7. Cho hai tam giác nhọn ABC và ECD, trong đó ba điểm B, C, D thẳng hàng. Hai đường cao BM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại I, hai đường cao CP và DQ của tam giác ECD cắt nhau tại K (*Hình 143*). Chứng minh $AI \parallel EK$.

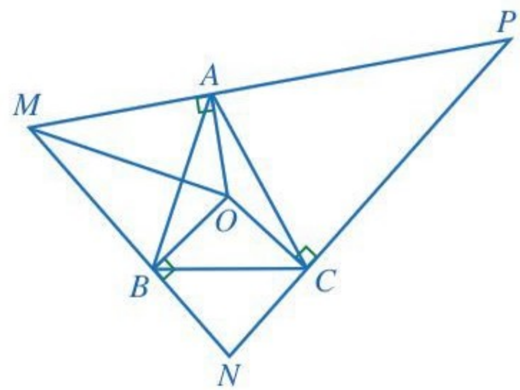


Hình 143

8. Cho tam giác ABC có O là giao điểm của ba đường trung trực. Qua các điểm A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với OA, OB, OC, hai trong ba đường đó lần lượt cắt nhau tại M, N, P (*Hình 144*). Chứng minh:

a) $\Delta OMA = \Delta OMB$ và tia MO là tia phân giác của góc NMP;

b) O là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác MNP.



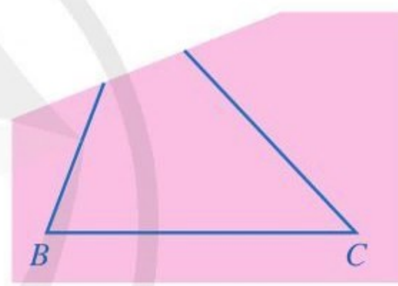
Hình 144

9. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, H là trực tâm, I là giao điểm của ba đường phân giác, O là giao điểm của ba đường trung trực. Các điểm A, G, H, I, O phân biệt. Chứng minh rằng:

a) Nếu tam giác ABC cân tại A thì các điểm A, G, H, I, O cùng nằm trên một đường thẳng;

b) Nếu các điểm A, H, I cùng nằm trên một đường thẳng thì tam giác ABC cân tại A.

10. Bạn Hoa vẽ tam giác ABC lên tờ giấy sau đó cắt một phần tam giác ở phía góc A (*Hình 145*). Bạn Hoa đố bạn Hùng: Không vẽ điểm A, làm thế nào tìm được điểm D trên đường thẳng BC sao cho khoảng cách từ D đến điểm A là nhỏ nhất? Em hãy giúp bạn Hùng tìm cách vẽ điểm D và giải thích cách làm của mình.



Hình 145

Chọn chữ đặt trước đáp án trả lời đúng (từ Bài 11 đến Bài 14):

11. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G. Khi đó

A. $AM = 2GM$. B. $AM = 2AG$. C. $GA = 3GM$. D. $GA = 2GM$.

12. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Hai đường trung trực của hai cạnh AB, AC cắt nhau tại O. Khi đó

A. $OA = OB = AB$. B. $OA = OB = OC$. C. $OB = OC = BC$. D. $OC = OA = AC$.

13. Cho tam giác ABC có $BC > AC$, I là giao điểm của hai đường phân giác góc A và góc B. Khi đó

A. $\widehat{ICA} = \widehat{ICB}$. B. $\widehat{IAC} = \widehat{IBC}$. C. $\widehat{ICA} > \widehat{ICB}$. D. $\widehat{IAC} < \widehat{IBC}$.

14. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Khi đó

A. $\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$. B. $\widehat{HAB} > \widehat{HAC}$. C. $\widehat{HAB} = \widehat{HCB}$. D. $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$.

THỰC HÀNH MỘT SỐ PHẦN MỀM
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Tính giá trị của đa thức một biến

Ví dụ 1 Cho đa thức $f(x) = x^8 - 6x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 8$. Tính: $f(-2)$; $f(3) - 4f(7)$.

Hướng dẫn

Ta nhập các lệnh ở ô **Nhập lệnh**.

– Nhập lệnh: f(x) = x^8 – 6x^7 + 5x^4 – 3x^2 + 8 rồi bấm ↵

Màn hình xuất hiện kết quả:

$$f(x) = x^8 - 6x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 8.$$

– Để tính $f(-2)$ ta nhập lệnh: f(– 2) rồi bấm ↵

Màn hình xuất hiện kết quả: 1100.

– Để tính $f(3) - 4f(7)$ ta nhập lệnh: f(3) – 4f(7) rồi bấm ↵

Màn hình xuất hiện kết quả: – 3347811.

1 Cho đa thức:
$g(x) = 2x^{10} - 8x^6 + 5x^5 - 3x^3 + 6$.
Tính: $g(-6)$; $g(3)$; $3g(-4) - 5g(8)$.

2. Tạo công cụ vẽ hình tam giác khi biết độ dài ba cạnh

a) Tạo các số a, b, c *ban đầu*

– Nhập lệnh: a = 1 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: b = 1 rồi bấm ↵

– Nhập lệnh: c = 1 rồi bấm ↵

b) Tạo các hộp chọn đầu vào

– Dùng  tạo hộp chọn đầu vào a và đặt tên là "Nhập độ dài cạnh thứ nhất của hình tam giác: a =" rồi tạo liên kết với a.

– Dùng  tạo hộp chọn đầu vào b và đặt tên là "Nhập độ dài cạnh thứ hai của hình tam giác: b =" rồi tạo liên kết với b.

– Dùng  tạo hộp chọn đầu vào c và đặt tên là "Nhập độ dài cạnh thứ ba của hình tam giác: c =" rồi tạo liên kết với c.

c) Vẽ hình tam giác ABC

– Dùng vẽ đoạn thẳng AB có độ dài bằng c.

– Dùng vẽ đường tròn tâm A bán kính b và đường tròn tâm B bán kính a, rồi dùng xác định giao điểm C của hai đường tròn đó.

– Ẩn đoạn thẳng AB.

– Dùng vẽ hình tam giác ABC.

– Ẩn các đối tượng không cần thiết để có hình tam giác ABC cần vẽ.

d) Vẽ hình tam giác ABC *có độ dài các cạnh là* a, b, c *thay đổi*

Khi thay các giá trị a, b, c thoả mãn a + b > c, b + c > a, c + a > b ở các hộp chọn đầu vào ta sẽ có một hình tam giác ABC khác.Chẳng hạn, nếu thay các giá trị a = 1, b = 1, c = 1 ban đầu bởi a = 3, b = 4, c = 5 thì trên màn hình ta sẽ có hình tam giác ABC có độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là 3, 4, 5.

3. Vẽ hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình hộp chữ nhật

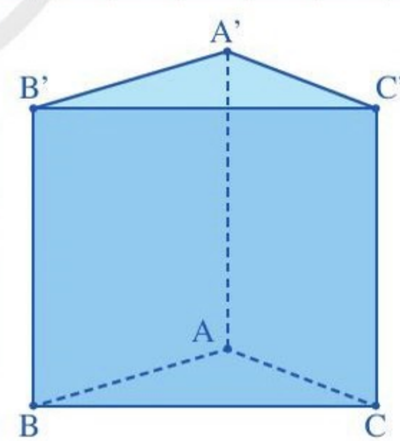
Để vẽ một số hình khối, ta nháy chuột vào **Hiển thị** trên thanh bảng chọn, sau đó nháy chuột vào **Hiển thị dạng 3D**. Khi đó màn hình xuất hiện phần màu xám được gọi là mặt phẳng chuẩn (Plane) và ba trục có màu đỏ, màu xanh lá cây, màu xanh dương. Ta có thể cho ẩn hoặc hiện các đối tượng này bằng cách nháy chuột phải vào một vị trí bất kì trong vùng hiển thị dạng 3D; rồi nháy chuột vào , .

Vẽ hình lăng trụ đứng tam giác

– Dùng vẽ một hình tam giác ABC ở phần màu xám trong vùng hiển thị dạng 3D.

– Nháy chuột vào , sau đó nháy chuột vào một điểm trong hình tam giác và giữ chuột trái, kéo lên trên, ta sẽ có hình lăng trụ đứng tam giác ABC.DEF.

– Đổi tên các đỉnh của hình lăng trụ và ẩn các đối tượng không cần thiết để có hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' cần vẽ.



2 Vẽ hình lăng trụ đứng tứ giác IJKL.I'J'K'L' và hình hộp chữ nhật MNPQ.M'N'P'Q'.

4. Trải nghiệm tính chất cùng đi qua một điểm của các đường đặc biệt trong tam giác

Để vẽ các hình phẳng, ta nháy chuột vào **Hiển thị** trên thanh bảng chọn, sau đó nháy chuột vào **Vùng làm việc**. Khi đó, vùng làm việc xuất hiện cùng với một trục ngang và một trục dọc ở trên lưới ô vuông. Ta có thể cho ẩn hoặc hiện các đối tượng này bằng cách nháy chuột phải vào một vị trí bất kì trong vùng làm việc; rồi nháy chuột vào , .

Chẳng hạn, sau đây là hướng dẫn cách vẽ ba đường trung tuyến của tam giác và trải nghiệm tính chất cùng đi qua một điểm của các đường trung tuyến đó.

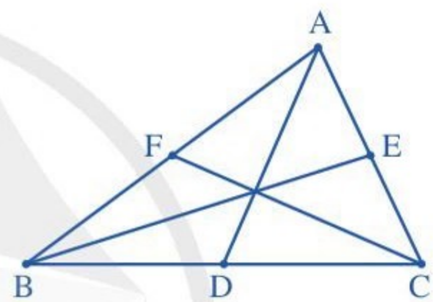
➤ Vẽ tam giác và ba đường trung tuyến của tam giác

– Dùng  vẽ các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC.

– Dùng  xác định trung điểm D, E, F lần lượt của các cạnh BC, CA, AB.

– Dùng  vẽ các đường trung tuyến AD, BE, CF của tam giác ABC.

– Ẩn các đối tượng không cần thiết để có tam giác ABC và các đường trung tuyến AD, BE, CF.



➤ Trải nghiệm tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

Khi di chuyển một trong các đỉnh của tam giác ABC, ta thấy các đường trung tuyến AD, BE, CF của tam giác ABC luôn đồng quy mặc dù các yếu tố của tam giác thay đổi.

3 Vẽ và trải nghiệm tính chất cùng đi qua một điểm của ba đường phân giác, ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác.

II. SỬ DỤNG PHẦN MỀM MICROSOFT EXCEL

Chúng ta có thể sử dụng những phần mềm thông dụng như Microsoft Excel và Microsoft Word để vẽ các loại biểu đồ một cách nhanh chóng. Sau đây phần mềm Microsoft Excel phiên bản 2016 được trình bày để vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng (đối với phần mềm Microsoft Word cũng làm tương tự).

1. Vẽ biểu đồ cột

Ví dụ 2 Bảng dưới đây cho biết số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của Đoàn Thể thao Việt Nam và Đoàn Thể thao Thái Lan tại SEA Games 30, tổ chức ở Philippines năm 2019.

Loại huy chương	Đoàn Thể thao Việt Nam	Đoàn Thể thao Thái Lan
Vàng	98	92
Bạc	85	103
Đồng	105	123

(*Nguồn: https://vtv.vn/the-thao*)

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của Đoàn Thể Thao Việt Nam.

b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của Đoàn Thể thao Việt Nam và Đoàn Thể thao Thái Lan.

Hướng dẫn

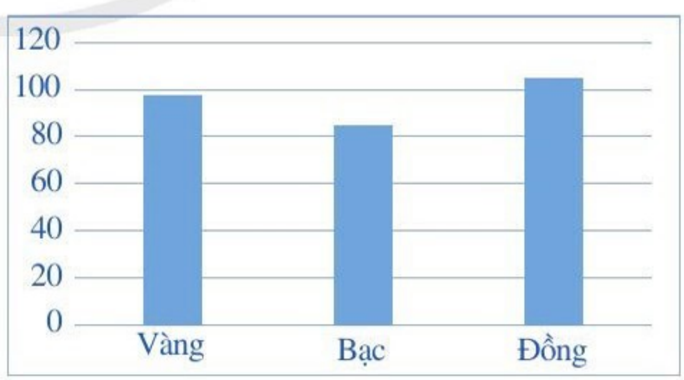
Trong Microsoft Excel, ta nhập vào dữ liệu như sau:

	A	B	C
1	Loại huy chương	Đoàn Thể thao Việt Nam	Đoàn Thể thao Thái Lan
2	Vàng	98	92
3	Bạc	85	103
4	Đồng	105	123

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của Đoàn Thể thao Việt Nam:

– Nháy chuột vào ô A1, giữ và di chuột đến ô B4 để chọn khối ô A1:B4.

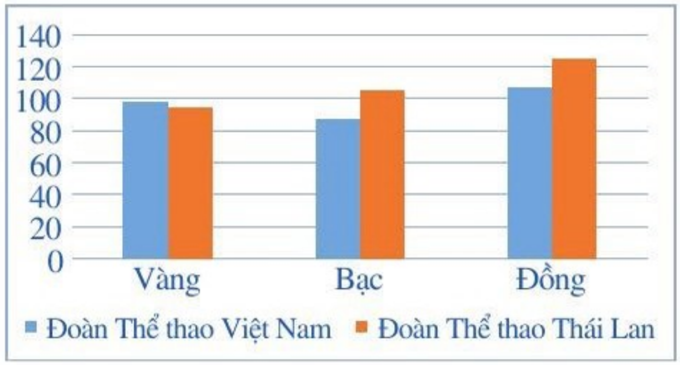
– Nháy chuột vào **Insert**, chọn , rồi chọn **All Charts** trong hộp thoại xuất hiện trên màn hình, tiếp theo chọn **Column**, sau đó chọn . Trong các biểu đồ gợi ý ở phần **Clustered Column** ta nháy chuột vào biểu đồ cần vẽ rồi nhấn ↵ để có biểu đồ theo yêu cầu.



b) Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của Đoàn Thể thao Việt Nam và Đoàn Thể thao Thái Lan:

– Nháy chuột vào ô A1, giữ và di chuột đến ô C4 để chọn khối ô A1:C4.

– Nháy chuột vào **Insert**, chọn, rồi chọn **All Charts** trong hộp thoại xuất hiện trên màn hình, tiếp theo chọn **Column**, sau đó chọn. Trong các biểu đồ gợi ý ở phần **Clustered Column** ta nháy chuột vào biểu đồ cần vẽ rồi nhấn ↵ để có biểu đồ theo yêu cầu.



2. Vẽ biểu đồ đoạn thẳng

Ví dụ 3 Bảng dưới đây cho biết thu nhập bình quân đầu người/năm của Việt Nam (tính theo đô la Mỹ) qua một số năm:

Năm	1986	1991	2010	2017	2018	2019	2020
Thu nhập bình quân đầu người/năm (đô la Mỹ)	423	138	1 318	2 366	2 566	2 715	2 786

(*Nguồn: https://data.worldbank.org*)

Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu thống kê trên.

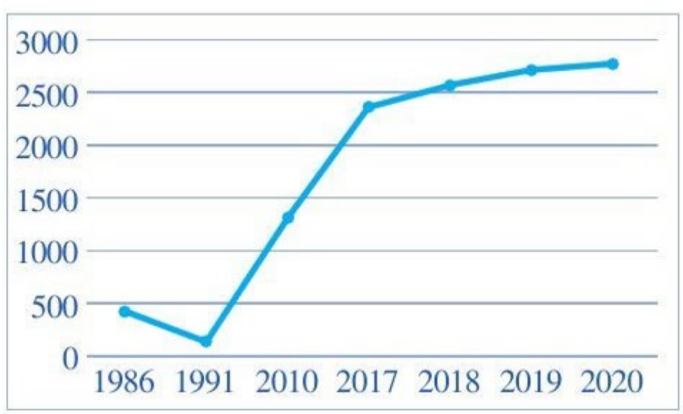
Hướng dẫn

Trong Microsoft Excel, ta nhập vào dữ liệu như sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Năm	1986	1991	2010	2017	2018	2019	2020
2	Thu nhập bình quân đầu người/năm (đô la Mỹ)	423	138	1318	2366	2566	2715	2786

– Nháy chuột vào ô A1, giữ và di chuột đến ô H2 để chọn khối ô A1:H2.

– Nháy chuột vào **Insert**, chọn, rồi chọn **All Charts** trong hộp thoại xuất hiện trên màn hình, tiếp theo chọn **Line**, sau đó chọn. Trong các biểu đồ gợi ý ở phần **Clustered Column** ta nháy chuột vào biểu đồ cần vẽ rồi nhấn ↵ để có biểu đồ theo yêu cầu.



BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn)	số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó	50
biểu thức đại số	các số, các biến nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa	42
biểu thức số	các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa)	41
đa thức một biến	tổng những đơn thức của cùng một biến	48
đơn thức một biến	biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc tích của một số với luỹ thừa số mũ nguyên dương của biến đó	47
đường cao của tam giác	đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện trong một tam giác	116
đường phân giác của tam giác	đoạn thẳng nối một đỉnh và giao điểm tia phân giác của góc tại đỉnh đó với cạnh đối diện trong một tam giác	108
đường trung trực của một đoạn thẳng	đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng ấy	100
đường trung trực của tam giác	đường trung trực của mỗi cạnh trong một tam giác	112
đường trung tuyến của tam giác	đoạn thẳng nối một đỉnh và trung điểm cạnh đối diện trong một tam giác	104
tam giác cân	tam giác có hai cạnh bằng nhau	93
tam giác đều	tam giác có ba cạnh bằng nhau	95
tam giác nhọn	tam giác có ba góc cùng nhọn	72
tam giác tù	tam giác có một góc tù	72
tam giác vuông	tam giác có một góc vuông	72
tam giác vuông cân	tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau	94
trọng tâm	giao điểm ba đường trung tuyến của một tam giác	105
trực tâm	giao điểm ba đường cao của một tam giác	117

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách và ảnh:
VŨ THỊ OANH – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

Trình bày bìa:
LƯU CHÍ ĐỒNG – TRẦN TIỂU LÂM
(*Ảnh bìa 1:* Cầu Nhật Tân, ảnh của HỮU THANH)

Sửa bản in:
LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

TOÁN 7 - TẬP HAI
Mã số: ....
ISBN: ....
In …….. cuốn, khổ 19 x 26,5 cm, tại…………….
Địa chỉ: ………………………………
Số xác nhận đăng kí xuất bản ……- … /CXBIPH/ ……-………/ĐHSP
Quyết định xuất bản số: ……………../QĐ - NXBĐHSP, ngày ………….
In xong và nộp lưu chiểu …..

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 7 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 7, thuộc bộ sách giáo khoa *Cánh Diều*, thực hiện theo *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018*.

Sách gồm hai tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.